PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Lượng giác

THƯ VIỆN KHTH TỈNH BÌNH ĐỊNH
VM 5.223

1. HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC
2. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ LƯỢNG GIÁC
3. SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC
   - GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐẠI SỐ
   - GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC
   - GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÀM SỐ
   - GIẢI CÁC BÀI TOÁN TÍCH PHÂN

NHÀ XUẤT BẢN HÀ NỘI

LÊ HỒNG ĐỨC - LÊ HỮU TRÍ - LÊ BÍCH NGỌC

514(075.2)
L250H

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
LƯỢNG GIÁC

T1

THƯ VIỆN [illegible]
W-5223
PHÒNG MƯỢN

LỜI GIỚI THIỆU

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ tài liệu:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

do Thạc sĩ Toán học Lê Hồng Đức chủ biên. Bộ tài liệu gồm 10 tập:

Tập 1: Phương pháp giải Toán Lượng giác.
Tập 2: Phương pháp giải Toán Hình học Giải tích trong Mặt phẳng.
Tập 3: Phương pháp giải Toán Hình học Giải tích trong Không gian.
Tập 4: Phương pháp giải Toán Hình học Không gian.
Tập 5: Phương pháp giải Toán Véctơ.
Tập 6: Phương pháp giải Toán Đại số.
Tập 7: Phương pháp giải Toán Hàm số.
Tập 8: Phương pháp giải Toán Tích phân.
Tập 9: Phương pháp giải Toán Tổ hợp.
Tập 10: Ôn tập Toán thi Tốt nghiệp Trung học phổ thông.

Với mục đích giúp các Thầy, Cô giáo có được bài giảng có hiệu quả hơn và các em có được cái nhìn tổng quan, hiểu được bản chất của mỗi vấn đề đặt ra, từ đó đưa ra phương pháp giải mạch lạc phù hợp với những đòi hỏi của một bài thi, nên mỗi trong mỗi tập tài liệu chúng tôi sắp xếp, hệ thống các kiến thức được đề cập trong chương trình Toán Trung học Phổ thông thành các Chủ đề.

Ở mỗi chủ đề:

1. *Với việc trình bày dưới dạng các bài toán cơ bản, cũng ví dụ minh hoạ ngay sau đó, sẽ giúp tăng chất lượng bài giảng cho các Thầy, Cô giáo và với các em học sinh sẽ hiểu và biết cách trình bày bài.*

2. *Tiếp đó tới các bài toán chọn lọc được lấy ra từ các đề thi vào các trường Đại học, sẽ giúp các Thầy, Cô giáo dẫn dắt các em học sinh tiếp cận nhanh chóng với những đòi hỏi của thực tế.*

3. *Đặc biệt là nội dung của các chú ý sau một vài ví dụ hoặc bài toán chọn lọc sẽ giúp các Thầy, Cô giáo cũng cố những hiểu biết chưa thật thấu đáo, cùng với cách nhìn nhận vấn đề đặt ra cho các em học sinh, để trả lời một cách thoả đáng câu hỏi " Tại sao lại nghĩ và làm như vậy ? ".*

4. *Ngoài ra có rất nhiều bài toán được giải bằng nhiều cách khác nhau sẽ giúp các học sinh trở lên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.*

Bộ tài liệu được viết trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, giải quyết tương đối triệt để các vấn đề của toán học sơ cấp. Bộ tài liệu này chắc chắn phù hợp với nhiều đối tượng bạn đọc từ các Thầy, Cô giáo đến các em Học sinh lớp 10, 11, 12 và các em chuẩn bị dự thi môn Toán Tốt nghiệp PTTH hoặc vào các Trường Đại học.

Cuốn **PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN LƯỢNG GIÁC** *được chia thành 3 phần:*

PHẦN I: HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC
PHẦN II: PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC
PHẦN III: PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HOÁ

Xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới sự giúp đỡ động viên tinh thần của những người Thầy mà tôi hằng kính trọng, gồm: GS.TS Trần Mạnh Tuấn nguyên Phó Giám Đốc Trung Tâm KHTN & CNQG, Nhà Giáo ưu tú Đào Thiện Khải nguyên Hiệu Trưởng Trường PTTH Hà Nội - Amsterdam, PGS.TSKH Đinh Quang Lưu, GS.TSKH Nguyễn Văn Thu và người Thầy thủa thiếu thời của tôi Bác Ngô Lâm.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng bằng việc tham khảo một lượng rất lớn các tài liệu hiện nay để vừa viết, vừa mang đi giảng dạy ngay cho các học sinh của mình từ đó kiểm nghiệm và bổ xung thiếu sót, cùng với việc tiếp thu có chọn lọc ý kiến của các bạn đồng nghiệp để hoàn thiện bộ tài liệu này, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.

Hà nội, ngày 1 tháng 1 năm 2003

LÊ HỒNG ĐỨC

MỤC LỤC

GIỚI THIỆU CHUNG

PHẦN I
HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC

CHƯƠNG I
CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Chủ đề 1. Công thức cộng... 11
Chủ đề 2. Công thức nhân... 15
Chủ đề 3. Công thức biến đổi... 21
Chủ đề 4. Các dạng toán sử dụng biến đổi lượng giác.... 25
- **Bài toán 1:** Biến đổi biểu thức lượng giác về dạng tổng - tích.... 25
- **Bài toán 2:** Rút gọn biểu thức lượng giác 32
- **Bài toán 3:** Chứng minh đẳng thức lượng giác độc lập đối với biến số..... 35
- **Bài toán 4:** Tính giá trị của biểu thức lượng giác 37
- **Bài toán 5:** Chứng minh đẳng thức lượng giác 43
- **Bài toán 6:** Chứng minh bất đẳng thức lượng giác 51
- **Bài toán 7:** Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất 59

CHƯƠNG II
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Chủ đề 1. Đẳng thức lượng giác trong tam giác.. ... .73
Chủ đề 2. Bất đẳng thức lượng giác trong tam giác.. 91
Chủ đề 3. Khai thác hệ thức lượng giác.. ... .115
Chủ đề 4. Nhận dạng tam giác.. 119
Chủ đề 5. Hệ thức lượng trong tam giác vuông.. 131
Chủ đề 6. Hệ thức lượng trong tam giác cân.. ... .137
Chủ đề 7. Hệ thức lượng trong tam giác đều.. ... .141
Chủ đề 8. Hệ thức lượng trong tam giác có dạng đặc biệt .... .145

PHẦN II
PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

CHƯƠNG I
CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Chủ đề 1. Phương trình lượng giác cơ bản..147
- **Bài toán 1:** Giải và hiện luận phương trình sinx=m.. 147
- **Bài toán 2:** Giải và hiện luận phương trình cosx=m..............................148
- **Bài toán 3:** Giải và hiện luận phương trình tgx=m..................................150
- **Bài toán 4:** Giải và hiện luận phương trình cotgx=m................................151
- **Bài toán 5:** Giải và hiện luận số nghiệm thuộc (α, β) của

phương trình lượng giác cơ bản.... 152
Chủ đề 2. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác. 157
Bài toán 1: Giải và biện luận phương trình $a.\sin^2x+b.\sin x+c=0$ 157
Bài toán 2: Giải và biện luận phương trình $a.tg^2x+b.tgx+c=0$ 161
Chủ đề 3. Phương trình bậc cao đối với một hàm số lượng giác. 167
Chủ đề 4. Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx. 173
Chủ đề 5. Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx 189
Chủ đề 6. Phương trình thuần nhất bậc ba đối với sinx và cosx 197
Chủ đề 7. Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx. 209
Bài toán 1: Giải và biện luận phương trình $a(\sin x+\cos x)+b\sin x.\cos x+c=0$ 209
Bài toán 2: Giải và biện luận phương trình $a(\sin x-\cos x)+b\sin x.\cos x+c=0$ 212
Chủ đề 8: Phương trình đối xứng đối với tgx và cotgx. 221
Bài toán 1: Giải và biện luận phương trình $a(tg^2x+cotg^2x)+b(tgx+cotgx)+c=0$ 221
Bài toán 2: Giải và biện luận phương trình $a(tg^2x+cotg^2x)+b(tgx-cotgx)+c=0$ 224
Chủ đề 9. Loại nghiệm không thích hợp 231
Chủ đề 10. Phương trình lượng giác hỗn hợp chứa các biểu thức đối xứng với $\sin^{2n}x$ và $\cos^{2n}x$.... 241
Chủ đề 11. Phương trình lượng giác hỗn hợp chứa các biểu thức đối xứng với $tg^{2n}x$ và $cotg^{2n}x$.... 251
Chủ đề 12. Các phương pháp giải phương trình lượng giác.... 259
Bài toán 1: Giải phương trình lượng giác bằng phương pháp đặt ẩn phụ 261
Bài toán 2: Giải phương trình lượng giác bằng phương pháp đổi biến.... 271
Bài toán 3: Giải phương trình lượng giác sử dụng công thức hạ bậc... 275
Bài toán 4: Biến đổi phương trình lượng giác thành phương trình tích... 283
Bài toán 5: Biến đổi phương trình lượng giác thành tổng các số hạng không âm. 301
Bài toán 6: Giải phương trình lượng giác bằng phương pháp đánh giá..... 304
Chủ đề 13. Phương trình hệ quả và phương trình tương đương..... 313
Bài toán 1: Xác định tham số này là hệ quả của phương trình kia..... 313
Bài toán 2: Xác định tham số để hai phương trình tương đương........ 316

CHƯƠNG II
HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Chủ đề 1. Các phương pháp giải hệ phương trình lượng giác cơ bản.... 321
Bài toán 1: Giải và biện luận hệ tổng.... 321
Bài toán 2: Giải và biện luận hệ tích.............. 324
Bài toán 3: Giải và biện luận hệ thương.......... 326
Chủ đề 2. Các phương pháp giải hệ phương trình lượng giác không mẫu mực.......... 331
Bài toán 1: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp cộng....... 331
Bài toán 2: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phép khử sau khi bình phương......... 333
Bài toán 3: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp đặt ẩn phụ...... 336
Bài toán 4: Hệ lặp ba ẩn........ 340
Bài toán 5: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp điều kiện cần và đủ..... 341
Bài toán 6: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp hàm số 343
Bài toán 7: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp đánh giá........ 345
Bài toán 8: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp biến đổi hỗn hợp....... 346

CHƯƠNG III
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC DẠNG ĐẠI SỐ

Chủ đề 1. Phương trình lượng giác chứa dấu trị tuyệt đối 355
Chủ đề 2. Phương trình lượng giác chứa căn thức 365
Chủ đề 3. Phương trình lượng giác chứa hàm số mũ. 377
Chủ đề 4. Phương trình lượng giác chứa hàm số lôgarit. 383
Chủ đề 5. Phương trình lượng giác liên quan tới đạo hàm và tích phân....387

PHẦN III
HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC

CHƯƠNG I
PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HOÁ GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

Chủ đề 1. Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức 391
Chủ đề 2. Giải phương trình, bất phương trình và hệ đại số 397

[illegible] PHÁP LƯỢNG GIÁC HOÁ
TÍNH GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

CHƯƠNG III
PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HOÁ TÍNH TÍCH PHÂN

CHƯƠNG IV
PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HOÁ GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

Chủ đề 1. Giải một số dạng toán của đường tròn.... 421
Chủ đề 2. Giải một số dạng toán của Elíp.... 429
Chủ đề 3. Giải một số dạng toán của Hypebol.... 441

TÀI LIỆU THAM KHẢO... 453

PHẦN I
HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC

CHƯƠNG I
CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. CÔNG THỨC CỘNG

a. $\cos(x+y)=\cos x.\cos y-\sin x.\sin y$
b. $\cos(x-y)=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y$
c. $\sin(x+y)=\sin x.\cos y+\cos x.\sin y$
d. $\sin(x-y)=\sin x.\cos y-\cos x.\sin y$
e. $tg(x+y)=\dfrac{tgx+tgy}{1-tgx.tgy}$
f. $tg(x-y)=\dfrac{tgx-tgy}{1+tgx.tgy}$

2. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

a. $\sin 2x=2\sin x.\cos x$
b. $\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1$
$=1-2\sin^2x$
c. $tg2x=\dfrac{2tgx}{1-tg^2x}$

3. CÔNG THỨC NHÂN BA

a. $\cos 3x=4\cos^3x-3\cos x$
b. $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3x$
c. $tg3a=\dfrac{(3-tg^2a)tga}{1-3tg^2a}$

4. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

a. $\cos x.\cos y=\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$
b. $\sin x.\sin y=\dfrac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$
$=\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$
c. $\sin x.\cos y=\dfrac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$
d. $\cos x.\sin y=\dfrac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$

5. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

a. $\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$
b. $\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$
c. $\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$
d. $\sin x-\sin y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$
e. $tgx+tgy=\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x.\cos y}$
f. $tgx-tgy=\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x.\cos y}$
g. $cotgx+cotgy=\dfrac{\sin(x+y)}{\sin x.\sin y}$
h. $cotgx-cotgy=\dfrac{\sin(y-x)}{\cos x.\cos y}$

THƯ VIỆN BÌNH-ĐỊNH

6. CÔNG THỨC HẠ BẬC

a. $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

b. $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

c. $\sin^3 x=\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{4}$

d. $\cos^3 x=\dfrac{3\cos x+\cos 3x}{4}$

7. CÔNG THỨC RÚT GỌN **asinx+bcosx**

Ta có:

a. $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$ với $tg\alpha=\dfrac{b}{a}$.

$=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$ với $tg\alpha=\dfrac{a}{b}$.

b. $a\sin x-b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x-\alpha)$ với $tg\alpha=\dfrac{b}{a}$.

$=-\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\alpha)$ với $tg\alpha=\dfrac{a}{b}$.

Hệ quả:

a. $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(x-\dfrac{\pi}{4})$.

b. $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\dfrac{\pi}{4})=-\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$.

c. Mở rộng

$\cot gx+tgx=\dfrac{2}{\sin 2x}$.

$\cot gx-tgx=2\cot g2x$.

8. CÔNG THỨC TÍNH **sinα, cosα, tgα** THEO **tg$\dfrac{\alpha}{2}$**

Nếu đặt $t=tg\dfrac{\alpha}{2}$, ta được:

- $\sin\alpha=\dfrac{2t}{1+t^2}$,
- $\cos\alpha=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,
- $tg\alpha=\dfrac{2t}{1-t^2}$.

CHỦ ĐỀ 1

CÔNG THỨC CỘNG

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Ta có các công thức:

a. cos(x+y)=cosx.cosy-sinx.siny

b. cos(x-y)=cosx.cosy+sinx.siny

c. sin(x+y)=sinx.cosy+cosx.siny

d. sin(x-y)= sinx.cosy-cosx.siny

e. $tg(x+y)=\dfrac{tgx+tgy}{1-tgx.tgy}$

f. $tg(x-y)=\dfrac{tgx-tgy}{1+tgx.tgy}$

Việc sử dụng công thức cộng cho phép ta tiếp cận với các dạng toán:

Dạng 1: Chứng minh đẳng thức lượng giác.

Dạng 2: Rút gọn biểu thức lượng giác.

Dạng 3: Chứng minh một biểu thức lượng giác độc lập với biến số.

Dạng 4: Tính giá trị của biểu thức lượng giác.

Phương pháp chung để thực hiện các dạng toán trên chúng ta đã được làm quen trong chương 1.

II.VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. sin(a+b+c)=sina.cosb.cosc+sinb.cosc.cosa+sinc.cosa.cosb-sinasinbsinc

b. $\dfrac{tg^2 2a-tg^2 a}{1-tg^2 2a.tg^2 a}=tg3a.tga$.

Giải

a. Ta có:

VT=sin[(a+b)+c]=sin(a+b).cosc+sinc.cos(a+b)

=(sina.cosb+sinb.cosa).cosc+sinc.(cosa.cosb-sina.sinb)

=sina.cosb.cosc+sinb.cosc.cosa+sinc.cosa.cosb-sina.sinb.sinc.

b. Ta có:

$$VT=\frac{(tg2a+tga)(tg2a-tga)}{(1+tg2a.tga)(1-tg2a.tga)}=\frac{tg2a+tga}{1-tg2a.tga}\cdot\frac{tg2a-tga}{1+tg2a.tga}=tg3a.tga.$$

Nhận xét: Như vậy trong ví dụ trên:

1. Với câu a) để thực hiện phép khai triển sin(a+b+c), chúng ta đã nhóm thành hai nhân tử góc là a+b và c rồi sử dụng công thức cộng cho sin.

2. Với câu b) chúng ta đã sử dụng phép biến đổi hằng đẳng thức rồi thực hiện phép gom các toán tử liên kết để làm xuất hiện các VP của công thức cộng.

Ví dụ 2: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

a. $A=\sin^2x+\cos(x-\frac{\pi}{3}).\cos(x+\frac{\pi}{3})$.

b. $B=\cos^2(x-\frac{\pi}{3})+\cos^2x+\cos^2(x+\frac{\pi}{3})$.

Giải

a. Ta có:

$$A=\sin^2x+(\cos x.\cos\frac{\pi}{3}+\sin x.\sin\frac{\pi}{3})(\cos x.\cos\frac{\pi}{3}-\sin x.\sin\frac{\pi}{3})$$

$$=\sin^2x+(\frac{1}{4}\cos^2x-\frac{3}{4}\sin^2x)=\frac{1}{4}(\cos^2x+\sin^2x)=\frac{1}{4}.$$

b. Ta có:

$$B=(\cos x.\cos\frac{\pi}{3}+\sin x.\sin\frac{\pi}{3})^2+\cos^2x+(\cos x.\cos\frac{\pi}{3}-\sin x.\sin\frac{\pi}{3})^2$$

$$=(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2+\cos^2x+(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2$$

$$=\frac{1}{2}\cos^2x+\frac{3}{2}\sin^2x+\cos^2x=\frac{3}{2}(\sin^2x+\cos^2x)=\frac{3}{2}.$$

Ví dụ 3: Cho cos(a+b)=k.cos(a-b), với k≠-1. CMR:

$$tga.tgb=\frac{1-k}{1+k}.$$

Giải

Ta có:

$$\cos(a+b)=k.\cos(a-b) \Leftrightarrow \cos a.\cos b-\sin a.\sin b=k(\cos a.\cos b+\sin a.\sin b)$$

$$\Leftrightarrow (1-k)\cos a.\cos b=(1+k)\sin a.\sin b \overset{k\neq-1}{\Leftrightarrow} tga.tgb=\frac{1-k}{1+k}.$$

Ví dụ 4: Tính giá trị các hàm số lượng giác của góc $\frac{\pi}{12}$.

Giải

Ta có:

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},$$

$$tg\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1},\ cotg\frac{\pi}{12}=\frac{1}{tg\frac{\pi}{12}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$$

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sin(a+\frac{\pi}{4})+\sin(a-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin a$.

b. $4\sin(a+\frac{\pi}{3}).\sin(a-\frac{\pi}{3})=4\sin^2a-3$

Bài tập 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\cos(a+b).\cos(a-b)=\cos^2b-\sin^2a$

b. $\frac{\sin(a+b).\sin(a-b)}{\cos^2a.\cos^2b}=tg^2a-tg^2b$.

c. $\frac{\cos(a+b).\cos(a-b)}{\cos^2a.\cos^2b}=1-tg^2a.tg^2b$.

d. $\frac{\sin(a+b).\sin(a-b)}{1-tg^2a.cotg^2b}=-\cos^2a.\sin^2b$.

e. $\frac{\sin(a+b+c)}{\cos a.\cos b.\cos c}=tga+tgb+tgc-tga.tgb.tgc$.

Bài tập 3: Rút gọn các biểu thức:

a. $A=\sin(a-\frac{\pi}{4}).\cos(\frac{\pi}{3}-a)-\cos(\frac{\pi}{4}-a).\sin(\frac{\pi}{3}-a)$.

b. $B=\cos(\frac{\pi}{3}-a).\cos(a+\frac{\pi}{4})+\cos(a+\frac{\pi}{6}).\cos(a+\frac{3\pi}{4})$.

c. $C=\frac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}+\frac{\sin(b-c)}{\cos b.\cos c}+\frac{\sin(c-a)}{\cos c.\cos a}$.

Bài tập 4: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

a. $A=\sin^2(x-\frac{2\pi}{3})+\sin^2x+\sin^2(x+\frac{2\pi}{3})$.

b. $B=tgx.tg(x+\frac{\pi}{3})+tg(x+\frac{\pi}{3}).tg(x+\frac{2\pi}{3})+tg(x+\frac{2\pi}{3}).tgx$.

c. $C=\frac{m\sin^3x+\sin 3x}{\sin x}+\frac{m\cos^3x-\cos 3x}{\cos x}$.

Bài tập 5: Cho m.sin(a+b)=cos(a-b). Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào a, b:

$$A=\frac{1}{1-m.\sin 2a}+\frac{1}{1-m.\sin 2b}.$$

Bài tập 6: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A=tg110^0.tg340^0+\sin160^0.\cos110^0+\sin250^0.\cos340^0$.

b. $B=\frac{1}{\cos 650^0}+\frac{1}{\sqrt{3}\sin(-110^0)}$.

c. $C=\frac{tg225^0-cotg81^0.cotg69^0}{cotg261^0+tg201^0}$.

THƯ VIỆN BÌNH ĐỊNH

Bài tập 7: Biết $\cos a=-\frac{9}{41}$, với $\pi<a<\frac{3\pi}{2}$, tính $A=tg(a-\frac{\pi}{4})$.

Bài tập 8: Tính giá trị các hàm số lượng giác của góc $\frac{7\pi}{12}$.

Bài tập 9: Tính giá trị các hàm số lượng giác của góc $\frac{11\pi}{12}$.

Bài tập 10: Cho a, b là hai góc nhọn thoả mãn $a+b=\frac{\pi}{4}$ và $tga.tgb=3-2\sqrt{2}$.

a. Tính tga+tgb.

b. Tính tga, tgb, từ đó suy ra a, b.

Bài tập 11: Cho tgx, tgy là nghiệm của phương trình:

$$at^2+bt+c=0.$$

CMR:

$$a.\sin^2(x+y)+b.\sin(x+y).\cos(x+y)+c.\cos^2(x+y)=c.$$

CHỦ ĐỀ 2

CÔNG THỨC NHÂN

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Ta có các công thức sau:

1. CÔNG THỨC NHÂN

Công thức nhân đôi

a. $\sin 2x=2\sin x.\cos x$

b. $\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x$

$=2\cos^2x-1$

$=1-2\sin^2x$

c. $tg2x=\frac{2tgx}{1-tg^2x}$

Công thức nhân ba

a. $\cos 3x=4\cos^3x-3\cos x$

b. $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3x$

c. $tg3a=\frac{3tga-tg^3a}{1-3tg^2a}$

d. $cotg3a=\frac{3\cot ga-\cot g^3a}{1-3\cot g^2a}$

2. CÔNG THỨC BIỂU DIỄN

Biểu diễn theo $t=tg\frac{a}{2}$

a. $\sin a=\frac{2t}{1+t^2}$

b. $\cos a=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

c. $tga=\frac{2t}{1-t^2}$

Biểu diễn theo t=cos2a

a. $\sin^2a=\frac{1-t}{2}$

b. $\cos^2a=\frac{1+t}{2}$

c. $tg^2a=\frac{1-t}{1+t}$

Việc sử dụng công thức nhân cho phép ta tiếp cận với các dạng toán:

Dạng 1: Chứng minh đẳng thức lượng giác.

Dạng 2: Rút gọn biểu thức lượng giác.

Dạng 3: Chứng minh một biểu thức lượng giác độc lập với biến số.

Dạng 4: Tính giá trị của biểu thức lượng giác.

Phương pháp chung để thực hiện các dạng toán trên chúng ta đã được làm quen trong chương I.

$$tg^2\frac{a}{2}=\frac{1-\cos a}{1+\cos a}$$

II.VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $8\cos^4 a-4\cos 2a-\cos 4a=3$.

b. $\frac{\cos a-\sin a}{\cos a+\sin a}=\frac{1}{\cos 2a}-\text{tg}2a$.

Giải

a. Ta có:

$$VT=8(\cos^2 a)^2-4\cos 2a-\cos 4a=2(1+\cos 2a)^2-4\cos 2a-\cos 4a$$
$$=2(1+2\cos 2a+\cos^2 2a)-4\cos 2a-\cos 4a$$
$$=2+4\cos 2a+(1+\cos 4a)-4\cos 2a-\cos 4a=3.$$

b. Ta có:

$$VT=\frac{(\cos a-\sin a)^2}{(\cos a+\sin a)(\cos a-\sin a)}=\frac{1-2\cos a.\sin a}{\cos^2 a-\sin^2 a}=\frac{1-\sin 2a}{\cos 2a}=\frac{1}{\cos 2a}-\text{tga}$$

Ví dụ 2: Rút gọn các biểu thức:

a. $A=\frac{(1+\cos a).\text{tg}^2\frac{a}{2}.\sin^2 a}{1-\cos a}+\cos^2 a$.

b. $B=\frac{\text{cotga}+\text{tga}}{\text{cotga}-\text{tga}}$.

Giải

a. Ta có:

$$A=\frac{\text{tg}^2\frac{a}{2}.\sin^2 a}{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}+\cos^2 a=\frac{\text{tg}^2\frac{a}{2}.\sin^2 a}{\text{tg}^2\frac{a}{2}}+\cos^2 a=\sin^2 a+\cos^2 a=1.$$

b. Ta có:

$$B=\frac{\frac{1}{\text{tga}}+\text{tga}}{\frac{1}{\text{tga}}-\text{tga}}=\frac{1+\text{tg}^2 a}{1-\text{tg}^2 a}=\frac{1}{\frac{1-\text{tg}^2 a}{1+\text{tg}^2 a}}=\frac{1}{\cos 2a}.$$

Ví dụ 3: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$$A=8(\sin^6 x.\cos^2 x+\cos^6 x.\sin^2 x)+\cos^4 2x.$$

Giải

Ta có:

$$A=8(\sin^4 x+\cos^4 x)\sin^2 x.\cos^2 x+\cos^4 2x$$
$$=8[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x.\cos^2 x].\sin^2 x.\cos^2 x+\cos^4 2x$$
$$=8(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x).\frac{1}{4}\sin^2 2x+\cos^4 2x=2\sin^2 2x-\sin^4 2x+\cos^4 2x$$
$$=1-\cos 4x+(\cos^2 2x-\sin^2 2x)(\cos^2 2x+\sin^2 2x)=1.$$

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$$A=\sin^4 x+\sin^4(x+\frac{\pi}{4})+\sin^4(x+\frac{\pi}{2})+\sin^4(x+\frac{3\pi}{4}).$$

Giải

Ta có:

$$A=\sin^4 x+\sin^4(x+\frac{\pi}{4})+\cos^4 x+\cos^4(x+\frac{\pi}{4})$$
$$=(\sin^4 x+\cos^4 x)+[\sin^4(x+\frac{\pi}{4})+\cos^4(x+\frac{\pi}{4})]$$
$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x.\cos^2 x+$$
$$+[\sin^2(x+\frac{\pi}{4})+\cos^2(x+\frac{\pi}{4})]^2-2\sin^2(x+\frac{\pi}{4}).\cos^2(x+\frac{\pi}{4})$$
$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+1-\frac{1}{2}\sin^2(2x+\frac{\pi}{2})=2-\frac{1}{2}(\sin^2 2x+\cos^2 2x)=\frac{3}{2}.$$

Ví dụ 5: Biết $\text{tgx}=\frac{1}{2}$, tính giá trị của biểu thức:

$$A=\frac{\text{tg}2x-\sin 2x}{\text{tg}2x+\sin 2x}.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng ngay công thức góc nhân đôi để biến đổi A về dạng:

$$A=\frac{\frac{2\text{tgx}}{1-\text{tg}^2 x}-\frac{2\text{tgx}}{1+\text{tg}^2 x}}{\frac{2\text{tgx}}{1-\text{tg}^2 x}+\frac{2\text{tgx}}{1+\text{tg}^2 x}}\overset{\text{tgx}=\frac{1}{2}}{=}\frac{1}{4}.$$

Cách 2: Thực hiện phép đơn giản biểu thức:

$$A=\frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-\sin 2x}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\sin 2x}=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}=\text{tg}^2 x=\frac{1}{4}.$$

Ví dụ 6: Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\sin 10^0.\sin 30^0.\sin 50^0.\sin 70^0.\sin 90^0.$$

Giải

Ta có:

$$P=\sin 10^0.\cos 60^0.\cos 40^0.\cos 20^0.$$

suy ra:

$$16P.\cos 10^0=16\cos 10^0.\sin 10^0.\cos 20^0.\cos 40^0.\cos 60^0$$
$$=8.\sin 20^0.\cos 20^0.\cos 40^0.\frac{1}{2}=2\sin 40^0.\cos 40^0=\sin 80^0=\cos 10^0$$

$$\Leftrightarrow P=\frac{1}{16}.$$

W5223

Ví dụ 7: Tính giá trị của biểu thức:

$A=\sin5^0.\sin15^0.\sin25^0.....\sin85^0.$

Giải

Biến đổi A về dạng:

$A=(\sin5^0.\sin85^0).(\sin15^0.\sin75^0)....(\sin35^0.\sin55^0).\sin45^0$

$=(\sin5^0.\cos5^0).(\sin15^0.\cos15^0)....(\sin35^0.\cos35^0).\frac{\sqrt2}{2}$

$=\frac12\sin10^0.\frac12\sin30^0.\frac12\sin50^0.\frac12\sin70^0.\frac{\sqrt2}{2}$

$=\frac{\sqrt2}{2^6}\cos20^0.\cos40^0.\cos80^0.$ (1)

Nhân cả hai vế của (1) với $\sin20^0$, ta được:

$A.\sin20^0=\frac{\sqrt2}{2^6}\sin20^0.\cos20^0.\cos40^0.\cos80^0=\frac{\sqrt2}{2^6}.\frac18.\sin160^0=\frac{\sqrt2}{2^9}\sin20^0$

$\Leftrightarrow A=\frac{\sqrt2}{2^9}.$

Ví dụ 8: Cho $\sin a+\cos a=\frac{\sqrt7}{2}$, tính giá trị của biểu thức:

a. $A=\cos4a.$

b. $B=\operatorname{tg}\frac a2.$

Giải

a. Ta có:

$\sin a+\cos a=\frac{\sqrt7}{2}\Leftrightarrow\frac74=(\sin a+\cos a)^2=\sin^2a+\cos^2a+2\sin a.\cos a=1+\sin2a$

$\Rightarrow\sin2a=\frac34.$

Từ đó:

$A=\cos4a=1-2\sin^22a=1-2.(\frac34)^2=-\frac18.$

b. Đặt $t=\operatorname{tg}\frac a2$, ta có:

$\sin a+\cos a=\frac{\sqrt7}{2}\Leftrightarrow\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{\sqrt7}{2}\Leftrightarrow(\sqrt7+2)t^2-4t+\sqrt7-2=0$

$\Leftrightarrow t=\frac{2\pm1}{\sqrt7+2}\Leftrightarrow t_1=\frac{3}{\sqrt7+2}\vee t_2=\frac{1}{\sqrt7+2}.$

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sin a.\cos^3a-\cos a.\sin^3a=\frac14\sin4a.$

b. $\frac{6+2\cos4a}{1-\cos4a}=\operatorname{tg}^2a+\operatorname{cotg}^2a.$

c. $\frac{\sin^23a}{\sin^2a}-\frac{\cos^23a}{\cos^2a}=8\cos2a.$

d. $\sqrt{\cos^2a.\cos^2b+\sin^2a.\sin^2b-\frac12\sin2a.\sin2b}=\cos(a+b),\ 0<a+b<\frac\pi2.$

e. $\sqrt{(1+\operatorname{cotg}a)\sin^2a+(1+\operatorname{tg}a)\cos^2a}=\sqrt2\cos(a-\frac\pi4),\ a\in[-\frac\pi4,\frac{3\pi}{4}]\backslash\{0,\frac\pi2\}$

Bài tập 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sin x.\sin(\frac\pi3-x).\sin(\frac\pi3+x)=\frac14\sin3x.$

Áp dụng tính giá trị của biểu thức:

$A=\sin20^0.\sin40^0.\sin80^0.$

b. $\cos x.\cos(\frac\pi3-x).\cos(\frac\pi3+x)=\frac14\cos3x.$

Áp dụng tính giá trị của biểu thức:

$A=\cos10^0.\cos20^0.\cos30^0....\cos80^0.$

c. $\operatorname{tg}x.\operatorname{tg}(\frac\pi3-x).\operatorname{tg}(\frac\pi3+x)=\operatorname{tg}3x.$ $=\frac{3\tan x-\tan^3x}{1-3\tan^2x}$

Áp dụng tính giá trị của biểu thức:

$A=\operatorname{tg}20^0.\operatorname{tg}40^0.\operatorname{tg}60^0.\operatorname{tg}80^0.$

d. $(\sin a-\cos b)^2+(\sin b+\cos a)^2=4\cos^2(\frac{a-b}{2}+\frac\pi4).$

Bài tập 3: Rút gọn các biểu thức:

a. $A=\frac{2}{\sin2a}-\operatorname{cotg}a.$

b. $B=\frac{2\cos^2a-1}{\sin^2(a+\frac\pi4).\operatorname{tg}(a-\frac\pi4)}.$

c. $C=\frac{1+\sin2a+\cos2a}{1+\sin2a-\cos2a}.$

Bài tập 4: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

a. $A=\sin4x+2\cos^2(2x+\frac\pi4).$

b. $B=\frac{\sin^3x+\sin3x}{\sin x}+\frac{\cos^3x-\cos3x}{\cos x}.$

c. $C=\cos x.\sqrt{\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}}$, với $\frac\pi2<x<\pi.$

Bài tập 5: Tính giá trị của biểu thức:

a. $A=\cos\frac{\pi}{65}.\cos\frac{2\pi}{65}.\cos\frac{4\pi}{65}.\cos\frac{8\pi}{65}.\cos\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65}.$

b. $B=\sin6^0.\sin42^0.\sin66^0.\sin78^0.$

c. $C=\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}$.

d. $D=tg^6\frac{\pi}{9}-33tg^4\frac{\pi}{9}+27tg^2\frac{\pi}{9}-3$

Bài tập 6: Cho $\sin\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2}=-\frac{1}{3}$, tính giá trị của biểu thức:

a. $A=\cos 2a$.

b. $B=\frac{1+\sin^2 a}{1+\cos^2 a}$.

Bài tập 7: Tính giá trị các hàm số lượng giác của góc $\frac{11\pi}{12}$.

Bài tập 8: Tính giá trị các hàm số lượng giác của góc $\frac{5\pi}{8}$.

Bài tập 9: Tính sin2a, biết:

a. $\sin a=\frac{3}{5}$, với $0<a<\frac{\pi}{2}$.

b. $\cos a=\frac{2}{3}$, với $\frac{3\pi}{2}<a<2\pi$.

c. $tga=\frac{1}{12}$.

CHỦ ĐỀ 3

CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

a. $\cos x.\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$.

b. $\sin x.\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$.

c. $\sin x.\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$.

d. $\cos x.\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$.

2. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

a. $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

b. $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$.

c. $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

d. $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$.

e. $tgx+tgy=\frac{\sin(x+y)}{\cos x.\cos y}$, với $x, y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

f. $tgx-tgy=\frac{\sin(x-y)}{\cos x.\cos y}$, với $x, y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

g. $cotgx+cotgy=\frac{\sin(x+y)}{\sin x.\sin y}$, với $x, y\neq k\pi, k\in Z$.

h. $cotgx-cotgy=\frac{\sin(y-x)}{\sin x.\sin y}$, với $x, y\neq k\pi, k\in Z$.

Việc sử dụng công thức cộng cho phép ta tiếp cận với các dạng toán:

Dạng 1: Chứng minh đẳng thức lượng giác.

Dạng 2: Rút gọn biểu thức lượng giác.

Dạng 3: Chứng minh một biểu thức lượng giác độc lập với biến số.

Dạng 4: Tính giá trị của biểu thức lượng giác.

Phương pháp chung để thực hiện các dạng toán trên chúng ta đã được làm quen trong chương I.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{1+\sin 2a}{1-\sin 2a}=\text{cotg}^2(a-\frac{\pi}{4}).$$

Giải

Ta có:

$$VT=\frac{\sin\frac{\pi}{2}+\sin 2a}{\sin\frac{\pi}{2}-\sin 2a}=\frac{2\sin(a+\frac{\pi}{4}).\cos(a-\frac{\pi}{4})}{2\cos(a+\frac{\pi}{4}).\sin(a-\frac{\pi}{4})}$$

$$=\text{tg}(a+\frac{\pi}{4}).\text{cotg}(a-\frac{\pi}{4})=\text{cotg}(a-\frac{\pi}{4}).\text{cotg}(a-\frac{\pi}{4})=\text{cotg}^2(a-\frac{\pi}{4}).$$

Chú ý: Như đã thấy trong chủ đề 2, chúng ta đã thực hiện phép biến đổi cho $\frac{1+\sin 2a}{1-\sin 2a}$ bằng việc sử dụng đẳng thức cơ bản $\sin^2a+\cos^2a=1$ và công thức nhân đôi. Lời giải trên cung cấp thêm một cách biến đổi lượng giác khác sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích.

Ví dụ 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sin a+\sin b+\sin c=4\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}.\sin\frac{c}{2}$, biết a+b=c.

b. $\sin a+\sin b+\sin c+\sin d=4\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{b+c}{2}.\sin\frac{c+a}{2}$, biết $a+b+c+d=2\pi$.

Giải

a. Ta có:

$$VT=2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}+\sin c=2\sin\frac{c}{2}.\cos\frac{a-b}{2}+2\sin\frac{c}{2}.\cos\frac{c}{2}$$

$$=2\sin\frac{c}{2}.(\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{a+b}{2})=4\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}.\cos\frac{c}{2}.$$

b. Ta có:

$$VT=2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}+2\sin\frac{c+d}{2}.\cos\frac{c-d}{2}$$

$$=2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}+2\sin(\pi-\frac{a+b}{2}).\cos\frac{c-d}{2}$$

$$=2\sin\frac{a+b}{2}.(\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{c-d}{2})$$

$$=4\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b+c-d}{4}.\cos\frac{a-b-c+d}{2}$$

$$=4\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b+c-(2\pi-a-b-c)}{4}.\cos\frac{a-b-c+(2\pi-a-b-c)}{2}$$

$$=4\sin\frac{a+b}{2}.\cos\left(\frac{c+a}{2}-\frac{\pi}{2}\right).\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{b+c}{2}\right)$$

$$=4\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{c+a}{2}.\sin\frac{b+c}{2}.$$

Ví dụ 3: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$$A=\frac{\sin 5x}{\sin x}-2(\cos4x+\cos2x).$$

Giải

Ta có:

$$A=\frac{\sin 5x-2\cos 4x.\sin x-2\cos 2x.\sin x}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin 5x-(\sin 5x-\sin 3x)-(\sin 3x-\sin x)}{\sin x}=1.$$

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x, a:

$$A=\text{tg}\frac{x+a}{2}.\text{tg}\frac{x-a}{2}\text{, biết } \cos x=\cos a.\cos b.$$

Giải

Ta có:

$$A=\frac{\sin\frac{x+a}{2}.\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}.\cos\frac{x-a}{2}}=\frac{\frac{1}{2}(\cos a-\cos x)}{\frac{1}{2}(\cos x+\cos a)}$$

$$=\frac{\cos a-\cos a.\cos b}{\cos a.\cos b+\cos a}=\frac{1-\cos b}{1+\cos b}=\frac{2\sin^2\frac{b}{2}}{2\cos^2\frac{b}{2}}=\text{tg}^2\frac{b}{2}.$$

Ví dụ 5: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A=\sin20^0.\sin40^0.\sin80^0$.

b. $B=\text{tg}9^0+\text{tg}15^0-\text{tg}27^0-\text{tg}63^0+\text{tg}75^0+\text{tg}81^0$.

c. $C=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$.

Giải

a. Ta có:

$$A=\frac{1}{2}(\cos20^0-\cos60^0).\sin80^0=\frac{1}{2}\sin80^0.\cos20^0-\frac{1}{4}\sin80^0$$

$$=\frac{1}{4}(\sin100^0+\sin60^0)-\frac{1}{4}\sin80^0=\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

b. Ta có:

$$B=\text{tg}9^0+\text{tg}15^0-\text{tg}27^0-\text{cotg}27^0+\text{cotg}15^0+\text{cotg}9^0$$

$$=(\text{tg}9^0+\text{cotg}9^0)+(\text{tg}15^0+\text{cotg}15^0)-(\text{tg}27^0+\text{co}27^0)$$

$$=\frac{1}{\cos 9^0.\sin 9^0}+\frac{1}{\cos 15^0.\sin 15^0}-\frac{1}{\cos 27^0.\sin 27^0}$$

$$=\frac{2}{\sin 18^0}+\frac{2}{\sin 30^0}-\frac{2}{\sin 54^0}$$

$$=\frac{2(\sin 54^0-\sin 18^0)}{\sin 18^0.\sin 54^0}+4=\frac{4\cos 36^0.\sin 18^0}{\sin 18^0.\sin 54^0}+4=8.$$

c. Nhân cả hai vế của biểu thức với $2\sin\frac{\pi}{7}$, ta được:

$$2C.\sin\frac{\pi}{7}=2\cos\frac{2\pi}{7}.\sin\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{4\pi}{7}.\sin\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{6\pi}{7}.\sin\frac{\pi}{7}$$

$$=\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}$$

$$\Leftrightarrow C=-\frac{1}{2}.$$

Nhận xét: Trong ví dụ trên để tính giá trị của các biểu thức A, B, C chúng ta đã sử dụng ba cách biến đổi cơ bản là:

- Với A ta sử dụng phép biến đổi tích thành tổng.
- Với B ta sử dụng phép nhóm thành đôi rồi biến đổi tổng thành tích.
- Với C chúng ta sử dụng phần tử trung gian $2\sin\frac{\pi}{7}$ để tạo ra các tích rồi thực hiện phép biến đổi tích thành tổng.

Các em học sinh cần thiết phải linh hoạt lựa chọn hướng biến đổi phù hợp, đặc biệt là xác định được phần tử trung gian.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Rút gọn các biểu thức:

a. $A=\frac{1-2\cos 2a}{1+2\cos 2a}$.

b. $B=\frac{\sqrt{3}-2\cos 2a}{\sqrt{3}+2\cos 2a}$.

c. $C=\frac{\sqrt{2}-\sin a-\cos a}{\sin a-\cos a}$.

Bài tập 2: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$$A=\cos^2x+\cos^2(x+a)-2\cos a.\cos x.\cos(x+a)$$

Bài tập 3: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào a, b, c:

$$A=\frac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}+\frac{\sin(b-c)}{\cos b.\cos c}+\frac{\sin(c-a)}{\cos c.\cos a}.$$

Bài tập 4: Biết $\cos x=\frac{3}{4}$, tính giá trị của các biểu thức:

a. $A=8\cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{x}{2}$.

b. $B=\sin x.\sin 2x.\sin 3x$.

c. $C=8\sin(x-\frac{\pi}{6}).\cos 2x.\sin(x+\frac{\pi}{6})$.

Bài tập 5: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A=tg9^0-tg27^0-tg63^0+tg81^0$.

b. $B=\frac{tg80^0}{cotg25^0+cotg75^0}-\frac{cotg10^0}{tg25^0+tg75^0}$.

c. $C=\cos75^0.\cos15^0+\sin165^0.\cos75^0$.

d. $D=\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{3\pi}{19}+\cos\frac{5\pi}{19}+...+\cos\frac{17\pi}{19}$.

CHỦ ĐỀ 4

CÁC DẠNG TOÁN SỬ DỤNG BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

MỞ ĐẦU

Việc sử dụng các phép biến đổi lượng giác cho phép ta giải các dạng toán:

Dạng 1: Thực hiện các yêu cầu biến đổi biểu thức thành tích hoặc thành tổng.

Dạng 2: Rút gọn biểu thức lượng giác.

Dạng 3: Chứng minh một biểu thức lượng giác độc lập với biến số.

Dạng 4: Tính giá trị của biểu thức lượng giác.

Dạng 5: Chứng minh đẳng thức lượng giác.

Dạng 6: Chứng minh bất đẳng thức lượng giác.

I. BÀI TOÁN 1

Bài toán 1: Biến đổi biểu thức lượng giác thành tổng - tích.

1. PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các công thức lượng giác.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Biến đổi các biểu thức sau thành tổng:

a. $A=\sin a.\sin 2a.\sin 3a$.

b. $B=4\cos a.\cos 2a.\sin\frac{5a}{2}$.

Giải

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A=\frac{1}{2}(\cos a-\cos 3a).\sin 3a=\frac{1}{2}(\cos a.\sin 3a-\cos 3a.\sin 3a)$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\sin 2a+\sin 4a)-\frac{1}{2}\sin 6a]=\frac{1}{4}(\sin 2a+\sin 4a-\sin 6a).$$

b. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$B=2(\cos 3a+\cos a).\sin\frac{5a}{2}=2\cos 3a.\sin\frac{5a}{2}+\cos a.\sin\frac{5a}{2}$$

$$=\sin\frac{11a}{2}-\sin\frac{a}{2}+\sin\frac{7a}{2}+\sin\frac{3a}{2}.$$

Nhận xét: Như vậy trong ví dụ trên để thực hiện mục đích biến đổi biểu thức về dạng tổng chúng ta đã sử dụng hai lần liên tiếp công thức biến đổi tích thành tổng. Tuy nhiên trong những trường hợp riêng cần lựa chọn hai đối tượng phù hợp để giảm thiểu độ phức tạp, chúng ta sẽ minh hoạ thông qua ví dụ sau:

DIỄN ĐÀN TOÁN LÝ - HÓA CẤP 2-3 ĐỊA CHỈ: 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

Ví dụ 2: Biến đổi các biểu thức sau thành tổng:

a. $A=8\sin(a-\frac{\pi}{6}).\cos2a.\sin(a+\frac{\pi}{6})$.

b. $B=4\cos(a-b).\cos(b-c).\cos(c-a)$.

Giải

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A=8\sin(a-\frac{\pi}{6}).\sin(a+\frac{\pi}{6}).\cos2a=4[\cos(-\frac{\pi}{3})-\cos2a].\cos2a$$
$$=2-4(1+\cos4a)=-2-4\cos4a.$$

b. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$B=2[\cos(a-c)+\cos(a-2b+c)].\cos(c-a)=2\cos^2(a-c)+2\cos(a-2b+c).\cos(c-a)$$
$$=1+\cos(2a-2c)+\cos(-2b+2c)+\cos(2a-2b)$$
$$=1+\cos(2a-2c)+\cos(2b-2c)+\cos(2a-2b).$$

Chú ý: Các ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ quan tâm tới việc biến đổi biểu thức lượng giác cho trước về dạng tích, đây là phép biến đổi quan trọng vào bậc nhất bởi nó cho phép chúng giải được các phương trình lượng giác không mẫu mực.

Việc biến đổi biểu thức lượng giác về dạng tích phụ thuộc vào các phép biến đổi dạng:

Dạng 1: Biến đổi tổng, hiệu thành tích.

Dạng 2: Biến đổi tích thành tổng.

Dạng 3: Lựa chọn phép biến đổi cho cos2x.

Dạng 4: Phương pháp luận hệ số.

Dạng 5: Phương pháp hằng số biến thiên.

Dạng 6: Phương pháp nhân.

Dạng 7: Sử dụng các phép biến đổi hỗn hợp.

Trước hết chúng ta làm quen với các ví dụ sử dụng phép biến đổi tổng, hiệu thành tích.

Ví dụ 3: Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a. $B=\cos3a-\sin a$.

b. $C=\sqrt{3}-\text{tg}a$.

Giải

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$B=\cos3a-\cos(a-\frac{\pi}{2})=-2\sin(2a-\frac{\pi}{4}).\sin(a+\frac{\pi}{4}).$$

b. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$C=\text{tg}\frac{\pi}{3}-\text{tg}a=\frac{\sin(\frac{\pi}{3}-a)}{\cos\frac{\pi}{3}.\cos a}=\frac{2\sin(\frac{\pi}{3}-a)}{\cos a}.$$

Ví dụ 4: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A=\cos a+\cos2a+\cos3a+\cos4a.$$

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A=(\cos a+\cos3a)+(\cos2a+\cos4a)=2\cos2a.\cos a+2\cos3a.\cos a$$
$$=2(\cos2a+\cos3a).\cos a=4\cos\frac{5a}{2}.\cos\frac{a}{2}.\cos a.$$

Nhận xét: Trong lời giải trên ta lựa chọn cách gom *theo hiệu* (hiệu hai góc bằng nhau) do đó đương nhiên có thể nhóm:

$$A=(\cos a+\cos2a)+(\cos3a+\cos4a).$$

Ngoài ra còn có thể gom *theo tổng* (tổng hai góc bằng nhau)

$$A=(\cos a+\cos4a)+(\cos2a+\cos3a).$$

Chúng ta sẽ sử dụng lại ý tưởng này trong ví dụ tiếp theo.

Ví dụ 5: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A=\sin a+\sin2a+\sin3a+\sin4a+\sin5a+\sin6a.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A=(\sin a+\sin6a)+(\sin2a+\sin5a)+(\sin3a+\sin4a)$$
$$=2\sin\frac{7a}{2}.\cos\frac{5a}{2}+2\sin\frac{7a}{2}.\cos\frac{3a}{2}+2\sin\frac{7a}{2}.\cos\frac{a}{2}$$
$$=2(\cos\frac{5a}{2}+\cos\frac{3a}{2}+\cos\frac{a}{2})\sin\frac{7a}{2}=2(2\cos\frac{3a}{2}.\cos a+\cos\frac{3a}{2})\sin\frac{7a}{2}$$
$$=2(2\cos a+1).\cos\frac{3a}{2}.\sin\frac{7a}{2}=4(\cos a+\frac{1}{2}).\cos\frac{3a}{2}.\sin\frac{7a}{2}$$
$$=4(\cos a+\cos\frac{\pi}{3}).\cos\frac{3a}{2}.\sin\frac{7a}{2}$$
$$=8\cos(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}).\cos(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{6}).\cos\frac{3a}{2}.\sin\frac{7a}{2}.$$

Cách 2: Lựa chọn phép gom:

$A=(\sin a+\sin2a)+(\sin3a+\sin4a)+(\sin5a+\sin6a)$ - *Đề nghị bạn đọc.*

Cách 3: Lựa chọn phép gom:

$A=(\sin a+\sin4a)+(\sin2a+\sin5a)+(\sin3a+\sin6a)$ - *Đề nghị bạn đọc.*

Ví dụ 6: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A=1+\sin a+\cos3a-(\cos a+\sin2a+\cos2a).$$

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A=(1-\cos2a)+\sin a+(\cos3a-\cos a)-\sin2a$$
$$=2\sin^2a+\sin a-2\sin2a.\sin a-2\sin a.\cos a$$
$$=(2\sin a+1-4\sin a.\cos a-2\cos a).\sin a=(2\sin a+1)(1-2\cos a).\sin a$$
$$=4(\sin a+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\cos a).\sin a=4(\sin a+\sin\frac{\pi}{6})(\cos\frac{\pi}{3}-\cos a).\sin a$$
$$=-16\sin(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{12}).\cos(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{12}).\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{a}{2}).\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{a}{2}).\sin a$$

Nhận xét: Trong lời giải trên sở dĩ ta lựa chọn cách gom như vậy bởi nhận thấy rằng chúng đều có chung nhân tử sina.

Ví dụ 7: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A=2\cos\frac{a}{2}.\cos x.\cos\frac{3a}{2}-2\sin\frac{a}{2}.\sin x.\sin\frac{3a}{2}-1.$$

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$\begin{aligned}A&=(\cos 2a+\cos a).\cos a+(\cos 2a-\cos a).\sin a-1\\&=\cos 2a.\cos a+\cos^2 a+\cos 2a.\sin a-\cos a.\sin a-1\\&=\cos 2a.\cos a+1-\sin^2 a+\cos 2a.\sin a-\cos a.\sin a\\&=(\cos a+\sin a).\cos 2a-(\sin a+\cos a).\sin a=(\cos a+\sin a).(\cos 2a-\sin a)\\&=\sqrt{2}\sin(a+\frac{\pi}{4}).[\cos 2a-\cos(\frac{\pi}{2}-a)]\\&=-2\sqrt{2}\sin(a+\frac{\pi}{4}).\sin(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}).\sin(\frac{3a}{2}-\frac{\pi}{4}).\end{aligned}$$

Nhận xét: Trong lời giải trên để biến đổi biểu thức về dạng tích trước tiên chúng ta đã sử dụng phép biến đổi tích thành tổng. Ví dụ này được trình bày với mục đích minh hoạ cho *Dạng 2 - Biến đổi tích thành tổng*.

Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ *Dạng 3 - Lựa chọn phép biến đổi cho cos2x.*

Ví dụ 8: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A=2\cos^3 a+\cos 2a+\sin a.$$

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$\begin{aligned}A&=2\cos^3 a+2\cos^2 a-1+\sin a=2(\cos a+1).\cos^2 a+\sin a-1\\&=2(\cos a+1)(1-\sin^2 a)+\sin a-1=(1-\sin a)[2(\cos a+1)(1+\sin a)-1]\\&=(1-\sin a)[1+2\sin a.\cos a+2(\sin a+\cos a)]\\&=(1-\sin a)[(\sin a+\cos a)^2+2(\sin a+\cos a)]\\&=(1-\sin a)(\sin a+\cos a)(\sin a+\cos a+2).\end{aligned}$$

Nhận xét:

1. Trong lời giải trên sở dĩ chúng ta lựa chọn phép biến đổi:

$$\cos 2a=2\cos^2 a-1$$

bởi 2 nhân tử còn lại là $2\cos^3 a$ (cos có hệ số 2) và sina (sin có hệ số 1)

2. Như vậy trong trường hợp trái lại, ta sẽ lựa chọn phép biến đổi:

$$\cos 2a=1-2\sin^2 a$$

Cụ thể chúng ta sẽ gặp trong phần *Các bài tập chọn lọc.*

3. Như vậy chúng ta đã có được phương pháp suy luận trong việc lựa chọn hai hướng biến đổi cho cos2a. Cuối cùng, trong trường hợp hệ số đối xứng ta sẽ lựa chọn phép biến đổi:

$$\boxed{\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a.}$$

4. Đôi khi việc gom các toán tử trong đầu bài nhằm tăng độ phức tạp của bài toán. Khi đó để tiện cho việc cân nhắc lựa chọn phép biến đổi các em học sinh hãy chuyển biểu thức về dạng đơn. Cụ thể ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 9: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A=4\sin 2a-3\cos 2a-3(4\sin a-1)-6\sin^2 a.$$

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$\begin{aligned}A&=4\sin 2a-3\cos 2a-12\sin a+3-6\sin^2 a=4\sin 2a-3(1-2\sin^2 a)-12\sin x+3-6\sin^2 a\\&=8\sin a.\cos a-12\sin a=4(2\cos a-3)\sin a\end{aligned}$$

Nhận xét:

1. Trong lời giải trên khi chuyển biểu thức về dạng đơn, ta lựa chọn phép biến đổi $\cos 2a=1-2\sin^2 a$ bởi khi đó sẽ khử được số hạng tự do và cùng với nhận xét các toán tử còn lại đều chứa sina.
2. Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ *Dạng 4 - Phương pháp luận hệ số.*

Ví dụ 10: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A=5\sin 3a-3\sin 5a.$$

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$\begin{aligned}A&=2\sin 3a-3(\sin 5a-\sin 3a)=2(3\sin a-4\sin^3 a)-6\cos 4a.\sin a\\&=(3-4\sin^2 a-3\cos 4a).\sin a=[3-2(1-\cos 2a)-3(2\cos^2 2a-1)].\sin a\\&=(3\cos^2 2a-\cos 2a-2).\sin a=(3\cos 2a+2)(\cos 2a-1).\sin a\end{aligned}$$

Chú ý: Các em học sinh cũng có thể sử dụng phương pháp tách dần:

$$\begin{aligned}&\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a,\\&\sin 5a=\sin(a+4a)=\sin a.\cos 4a+\cos a.\sin 4a\\&\qquad=\sin a.\cos 4a+2\cos a.\cos 2a.\sin 2a\\&\qquad=\sin a.\cos 4a+4\cos^2 a.\cos 2a.\sin a.\end{aligned}$$

Ví dụ 11: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A=2\sin a+\operatorname{cotg} a-2\sin 2a+1.$$

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$\begin{aligned}A&=(2\sin a-1)-(2\sin 2a-\operatorname{cotg} a)=(2\sin a-1)-(4\sin a.\cos a-\frac{\cos a}{\sin a})\\&=(2\sin a-1)-\frac{(4\sin^2 a-1)\cos a}{\sin a}=\frac{(2\sin a-1)[\sin a-(2\sin a+1)\cos a]}{\sin a}\\&=\frac{(2\sin a-1)(\sin a-\cos a-2\sin a.\cos a)}{\sin a}.\end{aligned}$$

Chú ý: Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ *Dạng 5 - Phương pháp hằng số biến thiên.*

Ví dụ 12: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A=\sin a.\cos a-2(\operatorname{tg} a+\cos^2 a)+4.$$

Giải

Nếu đặt t=2, ta được:

$$A=t^2-(\operatorname{tg} a+\cos^2 a)t+\sin a.\cos a.$$

khi đó A là một tam thức bậc hai có:

$$\Delta_t=(\operatorname{tg} a+\cos^2 a)^2-4\sin a.\cos a=(\operatorname{tg} a+\cos^2 a)^2-4\operatorname{tg} a.\cos^2 a=(\operatorname{tg} a-\cos^2 a)^2,$$

do đó phương trình A=0 có các nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} t_1=\dfrac{tga+\cos^2 a+(tga-\cos^2 a)}{2}=tga \\ t_2=\dfrac{tga+\cos^2 a-(tga-\cos^2 a)}{2}=\cos^2 a \end{array}\right.$$

tức là A có thể được phân tích thành:

$$A=(t-tga)(t-\cos^2 a)=(2-tga)(2-\cos^2 a).$$

Chú ý: Ý tưởng phân tích như trên còn được sử dụng khá hiệu quả đối với các biểu thức có tham số (sẽ được áp dụng với phương trình lượng giác chứa tham số), chúng ta sẽ minh hoạ thông qua ví dụ sau:

Ví dụ 13: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A=\sin a.\cos a-m(\sin a+2\cos a)+2m^2.$$

Giải

Viết lại A dưới dạng:

$$A=2m^2-(\sin a+2\cos a)t+\sin a.\cos a.$$

khi đó A là một tam thức bậc hai có:

$$\Delta_m=(\sin a+2\cos a)^2-8\sin a.\cos a=(\sin a-2\cos a)^2,$$

do đó phương trình A=0 có các nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} m_1=\dfrac{\sin a+2\cos a+(\sin a-2\cos a)}{4}=\dfrac{\sin a}{2} \\ m_2=\dfrac{\sin a+2\cos a-(\sin a-2\cos a)}{4}=\cos a \end{array}\right.$$

tức là A có thể được phân tích thành:

$$A=(2m-\sin a)(m-\cos a).$$

Nhận xét: Hai ví dụ trên minh hoạ cho ý tưởng của *phương pháp hằng số biến thiên*, lẽ đương nhiên chúng ta có thể thực hiện phép nhóm một cách thích hợp để có được các kết quả đó, cụ thể:

- Ta có:

$$\begin{aligned}A&=tga.\cos^2 a-2tga-2\cos^2 a+4\\&=(\cos^2 a-2)tga-2(\cos^2 a-2)\\&=(tga-2)(\cos^2 a-2)\end{aligned}$$

- Ta có:

$$\begin{aligned}A&=\sin a.\cos a-m.\sin a-2m.\cos a+2m^2\\&=(\cos a-m).\sin a-2m(\cos a-m)\\&=(\cos a-m)(\sin a-2m).\end{aligned}$$

và chúng ta nhận thấy công việc đó thật đơn giản hơn nhiều so với những lập luận trong lời giải của các ví dụ - xong đây luôn là ý tưởng hay để sử dụng cho việc giải các phương trình đại số cũng như lượng giác.

Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ *Dạng 6 - Phương pháp nhân.*

Ví dụ 14: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A=\sin\frac{5a}{2}-5\cos^3 a.\sin\frac{a}{2},\ \text{với } a\neq\pi+2k\pi,\ k\in Z.$$

Giải

Từ giả thiết $a\neq\pi+2k\pi$, $k\in Z$ ta được:

$$\frac{a}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow\cos\frac{a}{2}\neq0$$

Nhân cả hai vế của biểu thức với $2\cos\frac{a}{2}\neq0$, ta được:

$$\begin{aligned}2A\cos\frac{a}{2}&=2\sin\frac{5a}{2}.\cos\frac{a}{2}-10\cos^3 a.\sin\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2}\\&=\sin3a+\sin2a-5\cos^3 a.\sin a=3\sin a-4\sin^3 a+2\sin a.\cos a-5\cos^3 a.\sin a\\&=(3-4\sin^2 a+2\cos a-5\cos^3 a).\sin a=-(5\cos^3 a-4\cos^2 a-2\cos a+1).\sin a\\&=2(5\cos^2 a+\cos a-1)(\cos a-1)\sin\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow A=(5\cos^2 a+\cos a-1)(\cos a-1)\sin\frac{a}{2}.$$

Chú ý: Như vậy chúng ta đã được làm quen với 6 phương pháp biến đổi tổng thành tích, cuối cùng chúng ta minh hoạ thêm một vài ví dụ cho *phương pháp sử dụng các phép biến đổi hỗn hợp.*

Ví dụ 15: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A=(2\sin a+1)(3\cos4a+2\sin a-4)+4\cos^2 a-3$$

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$\begin{aligned}A&=(2\sin a+1)(3\cos4a+2\sin a-4)-3+4(1-\sin^2 a)\\&=(2\sin a+1)(3\cos4a+2\sin a-4)-4\sin^2 a+1\\&=(2\sin a+1)(3\cos4a+2\sin a-4-2\sin a+1)=(2\sin a+1)(3\cos4a-3).\end{aligned}$$

3. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Biến đổi các biểu thức sau thành tổng:

a. $A=\cos a.\cos2a.\cos3a.$

b. $B=2\sin a.\sin2a.\cos\frac{5a}{2}.$

c. $C=4\cos(a-\frac{\pi}{3}).\sin2a.\cos(a+\frac{\pi}{3}).$

Bài tập 2: Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a. $A=2\cos2a-\sqrt{3}.$

b. $B=\sin3a-\cos a.$

c. $C=1-tga.$

d. $D=1+2\sin a-\cos2a.$

e. $E=1+\cos a+\cos2a.$

Bài tập 3: Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a. $A=2\sin^3 a-\cos2a+\cos a.$

b. $B=3(\cot ga-\cos a)-5(tga-\sin a)-2.$

c. $C=9\sin a+6\cos a-3\sin2a+\cos2a-8.$

d. $D=2\sin2a-\cos2a-7\sin a+2\cos a+4.$

e. $E=1-\cos ax-\cos2bx+\cos(a+2b)x.$

f. $F=8\cos(a+b+c).\cos(a-b+c).\cos(a-b-c).\cos(a+b-c).$

DIỄN ĐÀN TOÁN - LÍ - HÓA CẤP 2+3 ĐỊA CHỈ [illegible] TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

Bài tập 4: Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a. $A=\sin a+\sin2a+\sin3a+\sin4a+\sin5a+\sin6a$.

b. $B=\cos a.\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{3a}{2}-\sin a.\sin\frac{a}{2}.\sin\frac{3a}{2}-\frac{1}{2}$.

Bài tập 5: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

a. $A=\cos^4a-\cos2a+2\sin^6a$.

b. $B=\cos^2a+\cos^3a+2\sin a-2$.

c. $C=\sin^22a-12(\cos^4a+tg^2a)+36$.

d. $D=\sin^8a+\cos^8a-2(\sin^{10}a+\cos^{10}a)$.

e. $E=\cos^23a+\cos^22x-\sin^2a$.

f. $F=\sin^23a-\cos^24a-\sin^25a+\cos^26a$.

Bài tập 6: Biến đổi biểu thức sau thành tích:

a. $A=(\sin a+3).\sin^4\frac{a}{2}-(\sin a+3).\sin^2\frac{a}{2}+1$.

b. $B=\cos^5a+\sin^7a+\frac{1}{2}(\cos^3a+\sin^5a)\sin2a-(\cos a+\sin a)$.

c. $C=2(1-4\sin^2a)\sin3a-1$, với $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$.

II.BÀI TOÁN 2

Bài toán 2: Rút gọn đẳng thức lượng giác.

1. PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các công thức lượng giác cùng các phép biến đổi lượng giác.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức:

$$A=\cos10x+2\cos^24x+6\cos3x.\cos x-\cos x-8\cos x.\cos^33x.$$

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A=\cos10x+1+\cos8x-\cos x-2(4\cos^33x-3\cos3x)\cos x$$
$$=2\cos9x.\cos x+1-\cos x-2\cos9x.\cos x=1-\cos x.$$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{\sin^42x+\cos^42x}{tg(\frac{\pi}{4}-x).tg(\frac{\pi}{4}+x)}.$$

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A=\frac{(\sin^22x+\cos^22x)^2-2\sin^22x.\cos^22x}{tg(\frac{\pi}{4}-x).\cot g[\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{4}+x)]}=\frac{1-\frac{1}{2}\sin^24x}{tg(\frac{\pi}{4}-x).\cot g(\frac{\pi}{4}-x)}$$
$$=1-\frac{1}{2}\sin^24x.$$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức:

$$A=4[\sin^4x+\cos^4(x+\frac{\pi}{4})]-3$$

từ đó suy ra giá trị của A với $x=\frac{\pi}{8}$.

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A=4\{\frac{1}{4}(1-\cos2x)^2+\frac{1}{4}[1+\cos(2x+\frac{\pi}{2})]^2\}-3$$
$$=(1-\cos2x)^2+(1-\sin2x)^2-3=3-2(\cos2x+\sin2x)-3=-2\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4}).$$

Suy ra với $x=\frac{\pi}{8}$, ta được:

$$A=-2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})=-2\sqrt{2}.$$

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2+2\cos x}}}}_{n\text{ dấu căn}},\ \text{với } 0\le x\le\pi.$$

Giải

Ta có:

$$2+2\cos x=2(1+\cos x)=4\cos^2\frac{x}{2}$$

suy ra:

$$\sqrt{2+2\cos x}=\sqrt{4\cos^2\frac{x}{2}}\overset{0\le x\le\pi}{=}2\cos\frac{x}{2}$$

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}}_{2\text{ dấu căn}}=2\cos\frac{x}{2^2}$$

...

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2+2\cos x}}}}_{n\text{ dấu căn}}=2\cos\frac{x}{2^n}.$$

Vậy:

$$A=\frac{1}{2}.2\cos\frac{x}{2^n}=\cos\frac{x}{2^n}.$$

Ví dụ 5: Rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{\sqrt{1+\sin2x}+\sqrt{1-\sin2x}}{\sqrt{1+\sin2x}-\sqrt{1-\sin2x}},\ \text{với } -\frac{\pi}{4}<x<0.$$

Giải

Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A=\frac{(\sqrt{1+\sin2x}+\sqrt{1-\sin2x})^2}{(\sqrt{1+\sin2x}-\sqrt{1-\sin2x})(\sqrt{1+\sin2x}+\sqrt{1-\sin2x})}$$

$$=\frac{1+\sin 2x+2\sqrt{1-\sin^2 2x}+1-\sin 2x}{1+\sin 2x-1+\sin 2x}$$

$$=\frac{1+\sqrt{\cos^2 2x}}{\sin 2x}=\frac{1+|\cos 2x|}{\sin 2x}\overset{-\frac{\pi}{4}<x<0}{=}\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{2\cos^2 x}{2\sin x.\cos x}=\text{cotgx}.$$

Chú ý: Người ta có thể sử dụng kết quả của ví dụ trên để tạo ra những yêu cầu khá thú vị, để minh hạo ta xét đòi hỏi:

Cho t∈[-1; 1]\{0} và thoả mãn:

$$tgx=\frac{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}.$$

CMR t=sin2x.

Ta thực hiện như sau:

Trước hết:

$$\text{tgx}=\frac{(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t})^2}{(\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t})(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t})}=\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}.$$

Mặt khác:

$$\sin 2x=\frac{2\text{tgx}}{1+\text{tg}^2x}=\frac{2.\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}}{1+\left(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right)^2}=\frac{2(1+\sqrt{1-t^2})t}{2(1+\sqrt{1-t^2})}=t.$$

Ví dụ 6: Rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{1}{\sin a}+\frac{1}{\sin 2a}+\ldots+\frac{1}{\sin 2^n a}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{1}{\sin 2^k a}=\frac{1+\cos 2^k a-\cos 2^k a}{\sin 2^k a}=\frac{1+\cos 2^k a}{\sin 2^k a}-\frac{\cos 2^k a}{\sin 2^k a}$$

$$=\frac{2\cos^2 2^{k-1}a}{2\sin 2^{k-1}a.\cos 2^{k-1}a}-\text{cotg}2^k a=\text{cotg}2^{k-1}a-\text{cotg}2^k a.$$

Suy ra:

$$A=\text{cotg}\frac{a}{2}-\text{cotga}+\text{cotga}-\text{cotg}2a+\ldots+\text{cotg}2^{n-1}a-\text{cotg}2^n a=\text{cotg}\frac{a}{2}-\text{cotg}2^n a.$$

P ĐỀ NGHỊ

Rút gọn các biểu thức:

$=\left(\frac{1}{\cos 2x}+1\right).\text{tgx}.$

b. $B=\cos 8x.\text{cotg}4x-\frac{\text{cotg}^2 2x-1}{2\,\text{cotg}2x}$

Bài tập 2: Rút gọn các biểu thức:

a. $A=\sin a+\sin 2a+\ldots+\sin na.$

b. $B=\cos a+\cos 2a+\ldots+\cos na.$

c. $C=\cos^2 a+\cos^2 2a+\ldots+\cos^2 na.$

d. $D=\sin^2 a+\sin^2 2a+\ldots+\sin^2 na.$

Bài tập 3: Rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2-\ldots-\sqrt{2-2\cos x}}}}_{n\text{ dấu căn}},\ \text{với } 0\le x\le 2\pi.$$

Bài tập 4: Rút gọn biểu thức:

a. $A=\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}.$

b. $B=\cos\frac{\pi}{2n+1}-\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\ldots+(-1)^{n+1}\cos\frac{n\pi}{2n+1}$

c. $C=(1-2\cos a)(1-2\cos 2a)\ldots(1-2\cos 2^{n-1}a).$

d. $D=\frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}}+\frac{1}{4^2\cos^2\frac{a}{2^2}}+\ldots+\frac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}}.$

Bài tập 5: Rút gọn các biểu thức:

a. $A=\frac{1}{\cos a.\cos 2a}+\frac{1}{\cos 2a.\cos 3a}+\ldots+\frac{1}{\cos na.\cos(n+1)a}.$

b. $B=\frac{1}{\sin a.\sin 2a}+\frac{1}{\sin 2a.\sin 3a}+\ldots+\frac{1}{\sin na.\sin(n+1)a}.$

Bài tập 6: Rút gọn các biểu thức:

a. $A=\text{tga}+\frac{1}{2}\text{tg}\frac{a}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\text{tg}\frac{a}{2^n}.$

b. $B=\text{tga}+2\text{tg}2a+\ldots+2^n\text{tg}2^n a.$

c. $C=\text{tga.tg}2a+\text{tg}2a.\text{tg}3a+\ldots+\text{tg}(n-1)a.\text{tgna}.$

Bài 1: Rút gọn các biểu thức:

a. $A=(1+\frac{1}{\cos 2a})(1+\frac{1}{\cos 4a})\ldots(1+\frac{1}{\cos 2^n a}).$

b. $B=2+\frac{\cos 2a}{\cos^2 a}+\frac{\cos 3a}{\cos^3 a}+\ldots+\frac{\cos na}{\cos^n a}.$

III. BÀI TOÁN 3

Bài toán 3: Chứng minh đẳng thức lượng giác độc lập với biến số.

1. PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng các phép biến đổi lượng giác để thực hiện phép rút gọn biểu thức lượng giác.

Cách 2: Sử dụng đạo hàm.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$$A=\sin^2(x-\frac{2\pi}{3})+\sin^2x+\sin^2(x+\frac{2\pi}{3}).$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng công thức cộng:

$$A=(\sin x.\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}.\cos x)^2+\sin^2x+(\sin x.\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}.\cos x)^2$$

$$=(-\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)^2+\sin^2x+(-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)^2$$

$$=\frac{1}{2}\sin^2x+\frac{3}{2}\cos^2x+\sin^2x=\frac{3}{2}(\sin^2x+\cos^2x)=\frac{3}{2}.$$

Cách 2: Sử dụng công thức nhân (hạ bậc):

$$A=\frac{1}{2}[1-\cos(2x-\frac{4\pi}{3})]+\frac{1}{2}(1-\cos2x)+\frac{1}{2}[1-\cos(2x+\frac{4\pi}{3})]$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}[\cos(2x-\frac{4\pi}{3})+\cos(2x+\frac{4\pi}{3})]-\frac{1}{2}\cos2x$$

$$=\frac{3}{2}-\cos2x.\cos\frac{4\pi}{3}-\frac{1}{2}\cos2x=\frac{3}{2}.$$

Chú ý: Như đã đặt vấn đề, chúng ta có thể thực hiện bài toán trên bằng đạo hàm, cụ thể:

Xét hàm số

$$A=\sin^2(x-\frac{2\pi}{3})+\sin^2x+\sin^2(x+\frac{2\pi}{3}).$$

Ta có:

$$A'_x=2\sin(x-\frac{2\pi}{3}).\cos(x-\frac{2\pi}{3})+2\sin x.\cos x+2\sin(x+\frac{2\pi}{3}).\cos(x+\frac{2\pi}{3})$$

$$=\sin(2x-\frac{4\pi}{3})+\sin2x+\sin(2x+\frac{4\pi}{3})=2\sin2x.\cos\frac{4\pi}{3}+\sin2x=0$$

⇔ Hàm số không đổi.

Ngoài ra ta còn có $A=A(0)=\frac{3}{2}$.

Vậy $A=\frac{3}{2}$ không phụ thuộc vào x.

Chú ý: Như đã đặt vấn đề trong bài toán " *Chứng minh đẳng thức lượng giác* ", đối với các em học sinh đã biết tới khái niệm đạo hàm, chúng ta còn có được một phương pháp được gọi là

" *Sử dụng đạo hàm tìm điều kiện của tham số để biểu thức không phụ thuộc vào x* "

Khi đó ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tính A'(x), rồi tìm điều kiện để A'(x)=0, với ∀x.

Bước 2: Kết luận.

Để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: Tìm a sao cho biểu thức:

$$A=\cos2x-a.\sin^2x+2\cos^2x$$

không phụ thuộc x.

Giải

Ta có:

A không phụ thuộc x ⇔ $A'_x=0\ \forall x$

$\Leftrightarrow -2\sin2x-2a.\cos x.\sin x-4\sin x.\cos x=0\ \forall x \Leftrightarrow -(a+4)\sin2x=0\ \forall x \Leftrightarrow a=-4$

Vậy với a=-4 thì A không phụ thuộc x.

Chú ý: Đương nhiên chúng ta cũng có thể thực hiện bài toán trên bằng phương pháp biến đổi lượng giác, cụ thể:

$$A=(1-2\sin^2x)-a.\sin^2x+2(1-\sin^2x)=(-4-a)\sin^2x+3$$

Vậy để A không phụ thuộc x điều kiện là:

$-a-4=0 \Leftrightarrow a=-4.$

3. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$$A=\cos^2(x-\frac{\pi}{3})+\cos^2x+\cos^2(x+\frac{\pi}{3}).$$

Bài tập 2: Xác định $a\in(0,\frac{\pi}{2})$ để biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$$A=\cos x+\cos(x+a)+...+\cos(x+5a).$$

Bài tập 3: Tìm a, b sao cho các biểu thức sau không phụ thuộc x.

a. $A=a.\cos4x+4a.\cos2x+b-\cos^4x.$

b. $B=2a.\sin x-a.\sin3x+b\sin5x-\sin^5x.$

Bài tập 4: Tìm a, b sao cho các biểu thức sau không phụ thuộc x.

a. $A=a.\cos^2x+b[\cos^2(x+\frac{\pi}{3})+\cos^2(x-\frac{\pi}{3})]-\frac{3}{2}.$

b. $B=a(\cos x-1)-\cos(ax+b^2)+b^2+1.$

IV.BÀI TOÁN 4

Bài toán 4: Tính giá trị của biểu thức lượng giác.

1. PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện phép biến đổi lượng giác để đơn giản biểu thức cần tính giá trị.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tính giá trị của biểu thức:

$$A=tg110^0.tg340^0+\sin160^0.\cos110^0+\sin250^0.\cos340^0.$$

Giải

Ta có:

$$A=-cotg20^0.tg(-20^0)+\sin20^0.\cos110^0-\sin110^0.\cos20^0=1-\sin90^0=0.$$

DIỄN ĐÀN TOÁN - LÍ - HOÁ CẤP 2+3 ĐỊA CHỈ: 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

Nhận xét: Như vậy trong ví dụ trên để tính giá trị của biểu thức trước hết chúng ta đã sử dụng các công thức của các cung liên kết để chuyển biểu thức A về dạng:

$$A=\cot g20^0.tg20^0+\sin 20^0.\cos 110^0-\sin 110^0.\cos 20^0$$

Bước tiếp theo chúng ta sử dụng tính chất tgx.cotgx=1 và công thức cộng, để nhận được:

$$A=1-\sin 90^0=0.$$

Loại ví dụ kiểu này chúng ta đã được làm quen trong chủ đề *công thức cộng*, ở đây nó được minh hoạ trước hết để các em học sinh nhớ lại.

Ví dụ tiếp theo sẽ nhắc lại cho các em về việc sử dụng phép hạ bậc và công thức nhân để tính giá trị củabiểu thức lượng giác.

Ví dụ 2: Tính giá trị của biểu thức:

$$A=\sin^6\frac{\pi}{48}+\cos^6\frac{\pi}{48}. \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$A=(\sin^2\frac{\pi}{48}+\cos^2\frac{\pi}{48})^3-3\sin^2\frac{\pi}{48}.\cos^2\frac{\pi}{48}.(\sin^2\frac{\pi}{48}+\cos^2\frac{\pi}{48})$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2\frac{\pi}{24}=1-\frac{3}{8}(1-\cos\frac{\pi}{12})=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos\frac{\pi}{12}. \qquad (1)$$

Mặt khác ta có:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$A=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}.\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\frac{20+3\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{32}.$$

Nhận xét: Như vậy trong ví dụ trên để tính giá trị của biểu thức trước hế chúng ta thực hiện việc hạ bậc cho biểu thức dựa trên hằng đẳng thức:

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

Bước tiếp theo sử dụng công thức nhân sin2x=2sinx.cosx, rồi tiếp tục h bậc để nhận được:

$$A=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos\frac{\pi}{12}.$$

Đến đây để tính giá trị của $\cos\frac{\pi}{12}$, ta đã sử dụng công thức cộng.

Ví dụ tiếp theo ngoài việc sử dụng công thức biến đổi tích thành tổn chúng ta vẫn sử dụng phép hạ bậc, chỉ có điều nó là hạ bậc đơn.

Ví dụ 3: Tính giá trị của biểu thức:

$$A=\sin^2 73^0+\sin^2 47^0-\sin 73^0.\sin 47^0.$$

Giải

Ta có:

$$A=\frac{1}{2}(1-\cos 146^0)+\frac{1}{2}(1-\cos 94^0)-\frac{1}{2}(\cos 26^0-\cos 120^0)$$

$$=1-\frac{1}{2}(\cos 146^0+\cos 94^0)-\frac{1}{2}(\cos 26^0+\frac{1}{2})=\frac{3}{4}-\cos 120^0.\cos 26^0-\frac{1}{2}\cos 26^0=$$

Chú ý: Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng một cách linh hoạt công thức nhân ba để tính giá trị của biểu thức lượng giác và yêu cầu quan trọng tới các em học sinh là hãy trả lời thoả đáng câu hỏi " *Hướng giải quyết đó xuất phát từ đâu ?* ".

Ví dụ 4: Tính giá trị của biểu thức:

$$A=tg^6\frac{\pi}{9}-33tg^4\frac{\pi}{9}+27tg^2\frac{\pi}{9}-3.$$

Giải

Ta có:

$$tg3a=\frac{3tga-tg^3a}{1-3tg^2a}\Rightarrow(tg^3a-3tga)^2=(3tg^2a-1)^2.tg^23a.$$

Với kết quả đó ta biến đổi A về dạng:

$$A=(tg^3\frac{\pi}{9}-3tg^2\frac{\pi}{9})^2-3(3tg^2\frac{\pi}{9}-1)^2=(3tg^2\frac{\pi}{9}-1)^2.tg^23.\frac{\pi}{9}-3(3tg^2\frac{\pi}{9}-1)^2$$

$$=3(3tg^2\frac{\pi}{9}-1)^2-3(3tg^2\frac{\pi}{9}-1)^2=0.$$

Ví dụ 5: Tính giá trị của biểu thức:

$$A=\cos\frac{\pi}{65}.\cos\frac{2\pi}{65}.\cos\frac{4\pi}{65}.\cos\frac{8\pi}{65}.\cos\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65}.$$

Giải

Nhân cả hai vế của biểu thức với $64\sin\frac{\pi}{65}$, ta được:

$$64A\sin\frac{\pi}{65}=64\sin\frac{\pi}{65}.\cos\frac{\pi}{65}.\cos\frac{2\pi}{65}.\cos\frac{4\pi}{65}.\cos\frac{8\pi}{65}.\cos\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65}$$

$$=32\sin\frac{2\pi}{65}.\cos\frac{2\pi}{65}.\cos\frac{4\pi}{65}.\cos\frac{8\pi}{65}.\cos\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65}$$

$$=16\sin\frac{4\pi}{65}.\cos\frac{4\pi}{65}.\cos\frac{8\pi}{65}.\cos\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65}$$

$$=8\sin\frac{8\pi}{65}.\cos\frac{8\pi}{65}.\cos\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65}$$

$$=4\sin\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65}=2\sin\frac{32\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65}$$

$$=\sin\frac{64\pi}{65}=\sin(\pi-\frac{\pi}{65})=\sin\frac{\pi}{65}$$

$$\Leftrightarrow A=\frac{1}{64}.$$

Nhận xét:

1. Như vậy trong ví dụ trên để tính giá trị của biểu thức chúng ta đã sử dụng nhân tử phụ $\sin\frac{\pi}{65}$ để tạo ra các công thức nhân đôi liên tiếp cho vế phải, ý tưởng này chúng ta đã được làm quen trong chủ đề *công thức nhân* cũng như trong trong bài toán rút gọn biểu thức.

Nếu bài toán phát biểu lại dưới dạng:

" *Tính giá trị của biểu thức:*

$$A=\sin\frac{63\pi}{130}.\sin\frac{61\pi}{130}.\sin\frac{57\pi}{130}.\cos\frac{49\pi}{130}.\cos\frac{33\pi}{130}.\cos\frac{\pi}{130}."$$

Khi đó chúng ta cần thực hiện ngay công việc chuyển đổi bằng công thức $\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ để biến đổi A về dạng:

$$A=\cos\frac{\pi}{65}.\cos\frac{2\pi}{65}.\cos\frac{4\pi}{65}.\cos\frac{8\pi}{65}.\cos\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65}.$$

2. Chúng ta sẽ minh hoạ thêm một ví dụ nữa cho việc sử dụng nhân tử phụ, chỉ có điều là nó được áp dụng cho biểu thức tổng.

Ví dụ 6: Tính giá trị của biểu thức:

$$A=\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{3\pi}{19}+\cos\frac{5\pi}{19}+...+\cos\frac{17\pi}{19}.$$

Giải

Nhân hai vế với $2\sin\frac{\pi}{19}$, ta được:

$$2A\sin\frac{\pi}{19}=2\sin\frac{\pi}{19}.\cos\frac{\pi}{19}+2\sin\frac{\pi}{19}.\cos\frac{3\pi}{19}+$$

$$+2\sin\frac{\pi}{19}.\cos\frac{5\pi}{19}+...+2\sin\frac{\pi}{19}.\cos\frac{17\pi}{19}$$

$$=\sin\frac{2\pi}{19}+\sin\frac{4\pi}{19}-\sin\frac{2\pi}{19}+$$

$$+\sin\frac{6\pi}{19}-\sin\frac{4\pi}{19}+...+\sin\frac{18\pi}{19}-\sin\frac{16\pi}{19}$$

$$=\sin\frac{18\pi}{19}=\sin(\pi-\frac{\pi}{19})=\sin\frac{\pi}{19}$$

$$\Leftrightarrow A=\frac{1}{2}.$$

***Nhận xét*:**

1. Như vậy trong ví dụ trên để tính giá trị của biểu thức chúng ta đã sử dụng nhân tử phụ $\sin\frac{\pi}{19}$ để tạo ra các tích

$$\cos a.\sin b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$$

tạo thuận lợi cho việc rút gọn VP.

Từ đó các em học hình dễ nhận thấy rằng ý tưởng này cũng sẽ được áp dụng cho biểu thức bao gồm tổng các sin, bởi:

$$\sin a.\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)].$$

2. Chúng ta đã từng biết tới việc tính giá trị của biểu thức lượng giác bằng việc giải phương trình, ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ thêm ý tưởng này, chỉ có điều ở đây chúng ta sẽ sử dụng tính chất nghiệm của các phương trình đại số (định lý Viét cho các nghiệm của phương trình bậc 2, 3, 4 ...) để xác định giá trị, trong những trường hợp như vậy chúng ta thường thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn một phương trình nhận các giá trị trong biểu thức làm nghiệm.

Thí dụ với $\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{5}$, π là nghiệm của phương trình:

$$5x=\pi+2k\pi,\ k\in Z.$$

Bước 2: Xây dựng phương trình đại số nhận các hàm số lượng giác chứa các cung làm nghiệm, từ đó thiết lập hệ thức Viét cho chúng.

Bước 3: Tính giá trị của biểu thức.

Để minh hoạ chúng ta xem xét các ví dụ sau:

Ví dụ 7: Tính giá trị của biểu thức:

$$A=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}+\frac{1}{\cos\frac{3\pi}{5}}-1.$$

Giải

Viết lại A dưới dạng:

$$A=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}+\frac{1}{\cos\frac{3\pi}{5}}+\frac{1}{\cos\pi}.$$

Nhận xét rằng $\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{5}$, π là nghiệm của phương trình:

$$5x=\pi+2k\pi,\ k\in Z. \quad (1)$$

Ta sẽ đi xây dựng phương trình đại số nhận $\cos\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{3\pi}{5}$, cosπ làm nghiệm bằng cách:

$$(1)\Leftrightarrow 3x=\pi-2x+2k\pi \Leftrightarrow \cos3x=\cos(\pi-2x+2k\pi)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3x-3\cos x=-\cos2x=-(2\cos^2x-1)\Leftrightarrow 4\cos^3x+2\cos^2x-3\cos x-1=0$$

Từ đó ta được:

$$\begin{cases}\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\pi=-\frac{1}{2}\\ \cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}.\cos\pi+\cos\pi.\cos\frac{\pi}{5}=-\frac{3}{4}\\ \cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{3\pi}{5}.\cos\pi=\frac{1}{4}\end{cases}$$

Vậy:

$$A=\frac{\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}.\cos\pi+\cos\pi.\cos\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{3\pi}{5}.\cos\pi}=-3.$$

***Chú ý*:** Như vậy thông qua ví dụ trên các em học sinh đã bắt đầu làm quen được với phương pháp, xong điều đáng bàn thêm ở đây là việc lựa chọn phương trình ban đầu, bởi đây là công việc quyết sự thành công do đó cần phải rất linh hoạt.

Để minh hoạ thêm chúng ta xét tiếp ví dụ sau:

Ví dụ 8: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A=tg^2\frac{\pi}{18}+tg^2\frac{5\pi}{18}+tg^2\frac{7\pi}{18}$. b. $B=tg^4\frac{\pi}{18}+tg^4\frac{5\pi}{18}+tg^4\frac{7\pi}{18}$.

Giải

Nhận xét rằng $\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}$ là nghiệm của phương trình:

$$tg^23x=\frac{1}{3}. \quad (1)$$

Ta sẽ đi xây dựng phương trình đại số nhận $tg^2\frac{\pi}{18}, tg^2\frac{5\pi}{18}, tg^2\frac{5\pi}{18}$ làm nghiệm bằng cách:

$$(1)\Leftrightarrow\left(\frac{3tgx-tg^3x}{1-3tg^2x}\right)^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3tg^6x-27tg^4x+33tg^2x-1=0$$

Từ đó ta được:

$$\begin{cases} tg^2\frac{\pi}{18}+tg^2\frac{5\pi}{18}+tg^2\frac{7\pi}{18}=9 \\ tg^2\frac{\pi}{18}.tg^2\frac{5\pi}{18}+tg^2\frac{5\pi}{18}.tg^2\frac{7\pi}{18}+tg^2\frac{7\pi}{18}.tg^2\frac{\pi}{18}=11 \\ tg^2\frac{\pi}{18}.tg^2\frac{5\pi}{18}.tg^2\frac{7\pi}{18}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy: A=9.

$$B=(tg^2\frac{\pi}{18}+tg^2\frac{5\pi}{18}+tg^2\frac{7\pi}{18})^2-$$
$$-2(tg^2\frac{\pi}{18}.tg^2\frac{5\pi}{18}+tg^2\frac{5\pi}{18}.tg^2\frac{7\pi}{18}+tg^2\frac{7\pi}{18}.tg^2\frac{\pi}{18})$$
$$=9^2-2.11=59.$$

3. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tính giá trị của biểu thức:

$$A=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$$

biết:

a. $\alpha=\frac{\pi}{24}$. b. $\alpha=\frac{5\pi}{12}$.

Bài tập 2: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A=\sin\frac{\pi}{48}.\cos\frac{\pi}{48}.\cos\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{6}$.

b. $B=\sin\frac{\pi}{24}.\sin\frac{5\pi}{24}.\sin\frac{7\pi}{24}.\sin\frac{11\pi}{24}$.

c. $C=\sin\frac{\pi}{30}.\sin\frac{7\pi}{30}.\sin\frac{13\pi}{30}.\sin\frac{19\pi}{30}.\sin\frac{25\pi}{30}$.

Bài tập 3: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A=\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}$.

b. $B=\sin10^0.\sin30^0.\sin50^0.\sin70^0$.

Bài tập 4: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A=tg^2\frac{\pi}{12}+cotg^2\frac{\pi}{12}$. b. $B=tg^2\frac{\pi}{24}+cotg^2\frac{\pi}{24}$.

Bài tập 5: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A=\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}+\cos^2\frac{5\pi}{7}$. c. $C=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}+\frac{1}{\cos\frac{3\pi}{7}}+\frac{1}{\cos\frac{5\pi}{7}}$.

b. $B=\cos^4\frac{\pi}{7}+\cos^4\frac{3\pi}{7}+\cos^4\frac{5\pi}{7}$.

Bài tập 6: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A=\cos^4\frac{\pi}{14}+\cos^4\frac{3\pi}{14}+\cos^4\frac{5\pi}{14}$. b. $B=\cos^6\frac{\pi}{14}+\cos^6\frac{3\pi}{14}+\cos^6\frac{5\pi}{14}$.

Bài tập 7: Tính giá trị của biểu thức:

$$A=\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}.$$

Bài tập 8: Biết:

$$\frac{1}{\sin^2x}+\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{tg^2x}+\frac{1}{cotg^2x}=6.$$

Tính giá trị của cos2x.

Bài tập 9: Biết:

$$\begin{cases}\cos a+\cos b=m\\ \sin a+\sin b=n\end{cases}, m,n\neq0.$$

Tính giá trị của sin(a+b).

V.BÀI TOÁN 5

Bài toán 5: Chứng minh đẳng thức lượng giác.

1. PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong các hướng biến đổi sau:

Hướng 1: Dùng công thức lượng giác biến đổi một vế thành vế còn lại (VT ⇒ VP hoặc VP ⇒ VT). Khi đó:

- Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
- Nếu xuất phát từ vế đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích.

Hướng 2: Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.

Hướng 3: Biến đổi một đẳng thức đã biết là luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

Để ý rằng một biểu thức lượng giác có thể được biến đổi thành nhiều dạng khác nhau. Chẳng hạn ta có:

$$\sin^2 2x = 1-\cos^2 2x = (1-\cos 2x)(1+\cos^2 x).$$

$$\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1-\cos 4x).$$

$$\sin^2 2x = 4\sin^2 x.\cos^2 x.$$

Tuỳ theo mỗi bài toán, ta lựa chọn công thức thích hợp để biến đổi.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\text{cotg}x+\text{tg}x=\dfrac{2}{\sin 2x}$. b. $\text{cotg}x-\text{cotg}2x=\dfrac{1}{\sin 2x}$.

Giải

a. Ta lựa chọn một trong hai cách

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi cho VT

$$VT=\text{cotg}x+\text{tg}x=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x.\cos x}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x}=\frac{2}{\sin 2x}.$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi cho VP

$$VT=\frac{2}{\sin 2x}=\frac{2(\cos^2 x+\sin^2 x)}{2\sin x.\cos x}=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\text{cotg}x+\text{tg}x.$$

b. Ta lựa chọn một trong hai cách

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi cho VT

$$\text{cotg}x-\text{cotg}2x=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{2\sin x.\cos x}$$

$$=\frac{2\cos^2 x-(2\cos^2 x-1)}{2\sin x.\cos x}=\frac{1}{\sin 2x}.$$

Cách 2: Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích

$$\text{cotg}x-\text{cotg}2x=\frac{\sin(2x-x)}{\sin x.\sin 2x}=\frac{1}{\sin 2x}.$$

Nhận xét: Như vậy trong ví dụ trên để chứng minh một đẳng thức lượng giác:

- Với câu a) khi thực hiện biến đổi VT, chúng ta dựa trên đánh giá VP chỉ chứa hàm sin do đó cần biến đổi VT theo các hàm sin và cos.
- Với câu b) ngoài cách sử dụng đánh giá như trên, trong cách hai chúng ta đã sử dụng công thức lượng giác có sẵn.

Ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ sử dụng phép biến đổi hạ bậc, theo hai hướng:

Hướng 1: *Hạ bậc đơn*, tức là hạ bậc từng nhân tử trong biểu thức.

Hướng 2: *Hạ bậc toàn cục*, tức là dựa trên hằng đẳng thức đại số:

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2.b^2.$$

$$a^6+b^6=(a^2+b^2)^3-3a^2.b^2(a^2+b^2).$$

Ví dụ 2: Chứng minh đẳng thức:

$$3-4\cos 2x+\cos 4x=8\sin^4 x.$$

Giải

Ta có:

$$VP=2(1-\cos 2x)^2=2-4\cos 2x+2\cos^2 2x=2-4\cos 2x+1+\cos 4x$$
$$=3-4\cos 2x+\cos 4x.$$

Ví dụ 3: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{1}{4}\cos 4x+\dfrac{3}{4}$. b. $\sin^6 x+\cos^6 x=\dfrac{3}{8}\cos 4x+\dfrac{5}{8}$.

c. $\sin^8 x+\cos^8 x=\dfrac{1}{64}\cos 8x+\dfrac{7}{16}\cos 4x+\dfrac{35}{64}$.

Giải

a. Ta lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Thực hiện phép hạ bậc đơn

$$VT=\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2$$

$$=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1+\cos 4x}{2}$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x.$$

Cách 2: Thực hiện phép hạ bậc toàn cục

$$VT=\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x.\cos^2 x$$

$$=1-\frac{1}{2}.\sin^2 2x=1-\frac{1}{2}.\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x.$$

b. Ta có:

$$VT=\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x.\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}.\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{3}{8}\cos 4x+\frac{5}{8}.$$

c. Ta có:

$$VT=\sin^8 x+\cos^8 x=(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x.\cos^4 x$$

$$=1-\frac{1}{8}\sin^4 2x=1-\frac{1}{8}(\sin^2 2x)^2=1-\frac{1}{8}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2$$

$$=1-\frac{1}{32}(1-2\cos 4x+\cos^2 4x)=1-\frac{1}{32}+\frac{1}{16}\cos 4x+\frac{1}{32}.\frac{1+\cos 8x}{2}$$

$$=\frac{35}{64}+\frac{7}{16}\cos 4x+\frac{1}{64}\cos 8x.$$

Chú ý: Cũng có thể sử dụng phép biến đổi sau để tận dụng kết quả của câu a) và b):

$$VT=\sin^8 x+\cos^8 x=\sin^2 x.\sin^6 x+\cos^2 x.\cos^6 x$$
$$=(1-\cos^2 x)\sin^6 x+(1-\sin^2 x)\cos^6 x=\sin^6 x+\cos^6 x-(\sin^4 x+\cos^4 x)\sin^2 x.\cos^2 x$$

Việc áp dụng phép biến đổi kiểu này vào câu c) tỏ ra không hiệu quả, tuy nhiều trong những trường hợp riêng lại tỏ ra khá hiệu quả và phép biến đổi như vậy được gọi là phép *hạ bậc đối xứng*, để minh hoạ thêm chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 4: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\cos 3x.\sin^3 x+\sin 3x.\cos^3 x=\frac{3}{4}\sin 4x$.

Áp dụng tính giá trị của biểu thức:

$A=\cos 172^0 30'.\sin^3 22^0 30'+\sin 172^0 30'.\cos^3 22^0 30'$.

b. $\cos 3x.\cos^3 x+\sin 3x.\sin^3 x=\cos^3 2x$.

Áp dụng tính giá trị của biểu thức:

$B=\cos 172^0 30'.\cos^3 22^0 30'+\sin 172^0 30'.\sin^3 22^0 30'$.

Giải

a. Ta lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Sử dụng phép hạ bậc đối xứng. ta có:

$$VT=\sin^2 x.\sin x.\cos 3x+\cos^2 x.\cos x.\sin 3x$$

$$=(1-\cos^2 x).\sin x.\cos 3x+(1-\sin^2 x).\cos x.\sin 3x$$

$$=\sin x.\cos 3x+\cos x.\sin 3x-(\cos x.\cos 3x+\sin x.\sin 3x)\sin x.\cos x$$

$$=\sin 4x-\frac{1}{2}\cos 2x.\sin 2x=\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 4x=\frac{3}{4}\sin 4x.$$

Cách 2: Sử dụng phép hạ bậc đơn, ta có:

$$VT=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)\cos 3x+\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)\sin 3x$$

$$=\frac{3}{4}(\sin x.\cos 3x+\cos x.\sin 3x)=\frac{3}{4}\sin 4x.$$

Với kết quả trên áp dụng với $x=22^0 30'$ ta được:

$$A=\frac{3}{4}\sin(4.22^0 30')=\frac{3}{4}\sin 90^0=\frac{3}{4}.$$

b. Tương tự.

Chú ý: Ví dụ tiếp theo chúng ta sử dụng các công thức biến đổi tích thành tổng.

Ví dụ 5: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sin 5x-2\sin x(\cos 4x+\cos 2x)=\sin x$.

b. $\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}=\cos 2x.\cos x$.

Giải

a. Ta có:

$$VT=\sin 5x-2\sin x(\cos 4x+\cos 2x)=\sin 5x-2\cos 4x.\sin x-2\cos 2x.\sin x$$

$$=\sin 5x-(\sin 5x-\sin 3x)-(\sin 3x-\sin x)=\sin x.$$

b. Ta có:

$$VT=\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos x)+\frac{1}{2}(\cos 3x-\cos 4x)$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)=\cos 2x.\cos x.$$

Ví dụ 6: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sin x.\sin(\frac{\pi}{3}-x).\sin(\frac{\pi}{3}+x)=\frac{1}{4}\sin 3x$.

Áp dụng tính giá trị của biểu thức:

$A=\sin\frac{\pi}{18}.\sin\frac{7\pi}{18}.\sin\frac{13\pi}{18}$.

b. $\cos x.\cos(\frac{\pi}{3}-x).\cos(\frac{\pi}{3}+x)=\frac{1}{4}\cos 3x$.

Áp dụng tính giá trị của biểu thức:

$B=\cos\frac{\pi}{18}.\cos\frac{7\pi}{18}.\cos\frac{13\pi}{18}$.

c. $tgx.tg(\frac{\pi}{3}-x).tg(\frac{\pi}{3}+x)=tg3x$.

Áp dụng tính giá trị của biểu thức:

$C=tg\frac{\pi}{18}.tg\frac{7\pi}{18}.tg\frac{13\pi}{18}$.

Giải

a. Ta có:

$$VT=\sin x.\sin(\frac{\pi}{3}+x)\sin(\frac{\pi}{3}-x)=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{3})\sin x$$

$$=\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x+\frac{1}{2})\sin x=\frac{1}{4}(3-4\sin^2 x)\sin x=\frac{1}{4}(3\sin x-4\sin^3 x)=\frac{1}{4}\sin 3x.$$

Áp dụng:

$$A=\sin\frac{\pi}{18}.\sin\frac{7\pi}{18}.\sin\frac{13\pi}{18}=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{8}.$$

b. Đề nghị bạn đọc tự làm

c. Sử dụng kết quả câu a) và b).

Chú ý: Ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ quan tâm tới các yêu cầu có nhiều biến.

Ví dụ 7: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sin(a+b)\sin(a-b)=\cos^2 b-\cos^2 a$.

b. $\cos(a+b)\cos(a-b)=\cos^2 a+\cos^2 b-1$.

Giải

a. Ta lựa chọn một trong hai cách

Cách 1: Sử dụng phép biến đổi tích thành tổng, ta có:

$$VT=\sin(a+b)\sin(a-b)=\frac{1}{2}(\cos 2b-\cos 2a)=\frac{1}{2}[(2\cos^2 b-1)-(2\cos^2 a-1)]$$

$$=\cos^2 b-\cos^2 a.$$

Cách 2: Sử dụng phép biến đổi tổng thành tích dựa trên việc hạ bậc, ta có:

$$VP=\cos^2 b-\cos^2 a=\frac{1}{2}(1+\cos 2b)-\frac{1}{2}(1+\cos 2a)=\frac{1}{2}(\cos 2b-\cos 2a)$$

$$=\sin(a+b)\sin(a-b).$$

b. Đề nghị bạn đọc tự làm.

Ví dụ 8: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c)=4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}$.

b. $\cos a+\cos b+\cos c+\cos(a+b+c)=4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{c+a}{2}$.

Giải

a. Sử dụng phép biến đổi tổng thành tích, ta có:

$$VT=(\sin a+\sin b)-[\sin(a+b+c)-\sin c]$$

$$=2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}-2\cos\frac{a+b+2c}{2}.\sin\frac{a+b}{2}$$

$$=-2\sin\frac{a+b}{2}.(\cos\frac{a+b+2c}{2}-\cos\frac{a-b}{2})=4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}.$$

Lưu ý: Cũng có thể sử dụng phép biến đổi tích thành tổng để thực hiện.

b. Để nghị bạn đọc tự làm.

Chú ý: Ví dụ tiếp theo sử dụng việc thêm, bớt nhân tử trung gian để biến đổi.

Ví dụ 9: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sum_{i=1}^{n}\sin(ia)=\frac{\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$. b. $\sum_{i=1}^{n}\cos(ia)=\frac{\sin\frac{na}{2}\cos\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$.

Giải

a. Ta có:

$$VT=\sin a+\sin 2a+...+\sin na=\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}.2\sin\frac{a}{2}.(\sin a+\sin 2a+...+\sin na)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}.(2\sin a.\sin\frac{a}{2}+2\sin 2a.\sin\frac{a}{2}+...+2\sin na.\sin\frac{a}{2})$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}.\{(\cos\frac{a}{2}-\cos\frac{3a}{2})+(\cos\frac{3a}{2}-\cos\frac{5a}{2})+...+$$

$$+[\cos\frac{(2n-1)a}{2}-\cos\frac{(2n+1)a}{2}]\}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}.[\cos\frac{a}{2}-\cos\frac{(2n+1)a}{2}]=\frac{\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

b. Để nghị bạn đọc tự làm.

Chú ý:

1. Dựa vào kết quả trong ví dụ trên chúng ta nhận được ngay đẳng thức:

$$\frac{\sin a+\sin 2a+...+\sin na}{\cos a+\cos 2a+...+\cos na}=tg\frac{(n+1)a}{2}.$$

2. Ví dụ tiếp theo chúng ta sử dụng một đẳng thức luôn đúng để suy ra đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 10: Cho $x+y+z=\pi$, chứng minh rằng:

$$tgx+tgy+tgz=tgx.tgy.tgz.$$

Giải

Từ giả thiết

$$x+y+z=\pi\Leftrightarrow x+y=\pi-z\Rightarrow tg(x+y)=tg(\pi-z)\Leftrightarrow\frac{tgx+tgy}{1-tgx.tgy}=-tgz$$

$$\Leftrightarrow tgx+tgy=-tgz+tgx.tgy.tgz\Leftrightarrow tgx+tgy+tgz=tgx.tgy.tgz.$$

Nhận xét: Ví dụ trên được trình với mục đích để các em học sinh tiếp cận với bài toán chứng minh đẳng thức lượng giác có điều kiện và nó được thực hiện bằng việc xuất phát từ biểu thức điều kiện để suy ra đẳng thức cần chứng minh, tuy nhiên đây không phải là đường lối chung cho mọi dạng toán như vậy.

Ví dụ sau sẽ minh hoạ một cách thức thực hiện theo chiều ngược lại.

Ví dụ 11: Cho tgx, tgy là nghiệm của phương trình:

$$at^2+bt+c=0. \qquad (1)$$

CMR:

$$a.\sin^2(x+y)+b.\sin(x+y).\cos(x+y)+c.\cos^2(x+y)=c. \qquad (2)$$

Giải

Vì tgx, tgy là nghiệm của phương trình (1), ta được:

$$\begin{cases}tgx+tgy=-\frac{b}{a}\\ tgx.tgy=\frac{c}{a}\end{cases} \qquad (I)$$

Biến đổi (2) về dạng:

$$[a.\sin(x+y)+b..\cos(x+y)]\sin(x+y)=c[1-\cos^2(x+y)]=c.\sin^2(x+y)$$

$$\Leftrightarrow a.\sin(x+y)+b..\cos(x+y)=c.\sin(x+y)\Leftrightarrow b..\cos(x+y)=(c-a).\sin(x+y)$$

$$\Leftrightarrow\frac{b}{c-a}=tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx.tgy}=\frac{-\frac{b}{a}}{1-\frac{c}{a}}=\frac{b}{c-a}\text{, luôn đúng.}$$

Chú ý: Đối với các em học sinh đã biết tới khái niệm đạo hàm, chúng ta còn có được một phương pháp được gọi là " *Sử dụng đạo hàm chứng minh đẳng thức* ", dựa trên định lý:

Định lí: Nếu hàm số y=f(x) có đạo hàm trong khoảng (a, b) và $f'(x)=0$, $\forall x\in(a, b)$ thì hàm số y=f(x) không đổi trong khoảng (a, b).

Từ đó với dạng toán

" *CMR A(x)=c, $\forall x\in D$, với c là hằng số* ",

chúng có thể thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tính $A'(x)$, rồi khẳng định $A'(x)=0$, với $\forall x\in D$.

Bước 2: Chọn $x_0\in D\Rightarrow A(x_0)=c$.

Để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 12: CMR với mọi x ta đều có:

$$\cos^2(x-a)+\sin^2(x-b)-2\cos(x-a).\sin(x-b).\sin(a-b)=\cos^2(a-b).$$

Giải

Xét hàm số $y=\cos^2(x-a)+\sin^2(x-b)-2\cos(x-a).\sin(x-b).\sin(a-b)$.

Ta có:

$$y'=-2\sin(x-a)\cos(x-a)+2\sin(x-b)\cos(x-b)+$$
$$+2\sin(a-b)[\sin(x-a).\sin(x-b)-\cos(x-a).\cos(x-b)]$$
$$=-\sin2(x-a)+\sin2(x-b)-2\sin(a-b).\cos(2x-a-b)$$
$$=2\cos(2x-a-b).\sin(a-b)-2\sin(a-b).\cos(2x-a-b)=0$$

$\Leftrightarrow$ Hàm số không đổi.

Ngoài ra ta còn có $y=y(b)=\cos^2(a-b)$.

Vậy $y=\cos^2(a-b)$.

Chú ý: Trong các tài liệu tham khảo về lượng giác bài toán trên thường được phát biểu dưới dạng:

" CMR $A=\cos^2(x-a)+\sin^2(x-b)-2\cos(x-a).\sin(x-b).\sin(a-b)$ độc lập với x ".

3. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\cos(x\pm n\pi)=(-1)^n\cos x$ với $n\in N$.

b. $\sin(x\pm n\pi)=(-1)^n\sin x$ với $n\in N$.

Bài tập 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\cos^2(x-y)-\cos^2(x+y)=\sin2x.\sin2y$.

b. $\cos^2(x-y)-\sin^2(x+y)=\cos2x.\cos2y$.

c. $2\cos x.\cos y.\cos(x+y)=\cos^2x+\cos^2y-\sin^2(x+y)$.

Bài tập 3: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sin^3x.(1+\text{cotg}x)+\cos^3x.(1+\text{tg}x)=\sin x+\cos x$.

b. $\sin3x-2\sin^3 3x+\cos2x.\sin x=\cos5x.\sin4x$.

c. $\sin^4x+\cos^4(x+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$.

Bài tập 4: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\cos4x=8\cos^4x-8\cos^2x+1$.

b. $8\cos^4x-8\cos^2x+1=\cos4x$.

c. $\cos^3x.\cos3x-\sin^3x.\sin3x=\frac{3}{4}\cos4x+\frac{1}{4}$.

Bài tập 5: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\text{tg}(x-\frac{\pi}{3})+\text{tg}x+\text{tg}(x+\frac{\pi}{3})=3\text{tg}3x$.

Áp dụng tính giá trị của biểu thức:

$$A=\text{tg}1^0+\text{tg}5^0+\text{tg}9^0+...+\text{tg}177^0.$$

b. $\text{tg}^2(x-\frac{\pi}{3})+\text{tg}^2x+\text{tg}^2(x+\frac{\pi}{3})=9\text{tg}^23x+6$.

Áp dụng tính giá trị của biểu thức:

$$A=\text{tg}^25^0+\text{tg}^210^0+\text{tg}^215^0+...+\text{tg}^285^0.$$

c. $\text{tg}x+\text{tg}y+\text{tg}z=\text{tg}x.\text{tg}y.\text{tg}z+\frac{\sin(x+y+z)}{\cos x.\cos y.\cos z}$.

d. $\frac{\text{tg}^3x}{\sin^2x}-\frac{1}{\sin x.\cos x}+\frac{\text{cotg}^3x}{\cos^2x}=\text{tg}^3x+\text{cotg}^3x$.

Bài tập 6: Cho:

$$\sin x+\sin y=2\sin(x+y),\ \text{với } x+y\neq k\pi,\ k\in Z.$$

CMR:

$$\text{tg}\frac{x}{2}.\text{tg}\frac{y}{2}=\frac{1}{3}.$$

Bài tập 7: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $1+\cos a+\cos2a+...+\cos na=\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}.\cos\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}$.

b. $\sin x+\sin(x+a)+\sin(x+2a)+...+\sin(x+na)=$
$$=\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}.\sin(x+\frac{na}{2})\sin\frac{(n+1)a}{2}.$$

c. $\cos x+\cos(x+a)+\cos(x+2a)+...+\cos(x+na)=$
$$=\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}.\cos(x+\frac{na}{2})\sin\frac{(n+1)a}{2}.$$

VI.BÀI TOÁN 6

Bài toán 6: Chứng minh bất đẳng thức lượng giác.

1. PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Muốn chứng minh một bất đẳng thức lượng giác, ta sử dụng các công cụ:

1. Các công thức lượng giác để biến đổi bất đẳng thức lượng giác.
2. Tính chất của các hàm số lượng giác.

$$-1\leq\sin x\leq1\ \&\ -1\leq\cos x\leq1$$

$$\sin x\pm\cos x=\sqrt{2}\sin(x\pm\frac{\pi}{4})\Rightarrow|\sin x\pm\cos x|\leq\sqrt{2}$$

Mở rộng

$$|a.\sin x+b.\cos x|\leq\sqrt{a^2+b^2}.$$

3. Các bất đẳng thức đại số và tính chất tam thức bậc hai.
4. Đối với các em học sinh đã được làm quen với khái niệm đạo hàm thì có thêm một phương pháp là " *Sử dụng đạo hàm chứng minh bất đẳng thức* ".

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng:

$$\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}>1.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng mối liên hệ giữa các góc, ta biến đổi:

$$VT=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12})+\sin\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4})$$

$$=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{6}}{2}>1.$$

Cách 2: Sử dụng công thức cộng, ta biến đổi:

$$VT=\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})+\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}>1.$$

Nhận xét: Như vậy trong ví dụ trên để chứng minh bất đẳng thức lượng gi chúng ta đã sử dụng phép biến đổi lượng giác để tính giá trị của VT, từ đó đư ra nhận xét cho bất đẳng thức. Chúng ta xét thêm một ví dụ minh hoạ phươn pháp biến đổi tương đương.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng:

$$4\sin^2\frac{a+b}{2}.\cos^2\frac{a-b}{2}+\cos2a+\cos2b\le2. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức về dạng:

$(\sin a+\sin b)^2+1-2\sin^2a+1-2\sin^2b\le2 \Leftrightarrow (\sin a-\sin b)^2\ge0$, luôn đúng.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng:

$$tg^4x+tg^42x+cotg^43x\ge\frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Giải

Để giảm độ phức tạp, ta đặt a=tgx, b=tg2x, c=cotg3x.

Ta có:

$$c=cotg3x=cotg(x+2x)=\frac{1-tgx.tg2x}{tgx+tg2x}=\frac{1-ab}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)c=1-ab \Leftrightarrow ab+bc+ca=1. \qquad (2)$$

Sử dụng (2), ta biến đổi tương đương (1) về dạng:

$$3(a^4+b^4+c^4)\ge1 \Leftrightarrow 3(a^4+b^4+c^4)\ge(ab+bc+ca)^2$$

$\Leftrightarrow (a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2+(a^2-bc)^2+(b^2-ac)^2+(c^2-ab)^2\ge0$, luôn đúng

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi

$$a=b=c \Leftrightarrow tgx=tg2x=cotg3x \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in Z.$$

Chú ý: Ví dụ tiếp theo chúng ta sử dụng đồng thời phép biến đổi lượng giác cùng với tính chất của hàm số lượng giác để giải, tuy nhiên cần có một chút khéo léo.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng:

$$|\sin\alpha|.\sin x+|\cos\alpha|.\cos x\le1.$$

Giải

Đặt $|\sin\alpha|=\sin\beta$ với $0\le\beta\le\frac{\pi}{2}$, khi đó:

$$|\cos\alpha|=\cos\beta,$$

ta được:

$$|\sin\alpha|.\sin x+|\cos\alpha|.\cos x=\sin\beta.\sin x+\cos\alpha\beta.\cos x=\cos(x-\beta)\le1.$$

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi

$$x=\beta \Leftrightarrow \begin{cases}|\sin\alpha|=\sin x\\|\cos\alpha|=\cos x\end{cases} \Leftrightarrow x=\alpha.$$

Nhận xét: Như vậy trong ví dụ trên chúng ta đã sử dụng tính chất $|\cos x|\le1$, điều này hiển nhiên có thể mở rộng:

$$\sin x_1+...+\sin x_n\le n.$$

Để minh hoạ chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 5: Chứng minh rằng:

$$\sin x.\sin2x.\sin3x\le\frac{3}{4}.$$

Giải

Biến đổi VT về dạng tổng:

$$VT=\frac{1}{2}(\cos x-\cos3x).\sin3x=\frac{1}{2}\sin3x.\cos x-\frac{1}{2}\cos3x.\sin3x$$

$$=\frac{1}{4}(\sin4x+\sin2x)-\frac{1}{4}\sin6x=\frac{1}{4}(\sin4x+\sin2x-\sin6x)\le\frac{3}{4}.$$

Chú ý: Với các bất đẳng thức có điều kiện chúng ta cần khéo léo trong việc biến đổi để tận dụng có hiệu quả nhất điều kiện của giả thết. Để minh hoạ trước hết ta xem xét một ví dụ đơn giản sau:

Ví dụ 6: Cho $0\le x+y\le2\pi$, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2}(\sin x+\sin y)\le\sin\frac{x+y}{2}.$$

Giải

Biến đổi vế trái, ta được:

$$\frac{1}{2}(\sin x+\sin y)=\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}.$$

Theo giả thiết $0\le x+y\le2\pi$ suy ra

$$0\le\frac{x+y}{2}\le\pi \Rightarrow \sin\frac{x+y}{2}\ge0.$$

Mặt khác ta luôn có bất đẳng thức:

$$\cos\frac{x-y}{2}\le1,$$

do đó:

$$\frac{1}{2}(\sin x+\sin y)=\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}\le\sin\frac{x+y}{2}\text{, đpcm.}$$

- Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}0\le x+y\le 2\pi\\ \cos\frac{x-y}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x+y\le 2\pi\\ x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le \pi\\ x=y\end{cases}.$$

Chú ý: Như vậy chúng ta đã biết cách sử dụng tính chất của hàm số lượng giác để chứng minh bất đẳng thức, ví dụ tiếp theo minh hoạ việc sử dụng bất đẳng thức đại số để giải:

Ví dụ 7: Cho $\mathrm{tg}\alpha=3\mathrm{tg}\beta$. CMR:

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}\le\mathrm{tg}(\alpha-\beta)\le\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Giải

Ta có:

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}\beta}=\frac{2\mathrm{tg}\beta}{1+3\mathrm{tg}^2\beta}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$|\mathrm{tg}(\alpha-\beta)|=\left|\frac{2\mathrm{tg}\beta}{1+3\mathrm{tg}^2\beta}\right|\le\frac{2|\mathrm{tg}\beta|}{2\sqrt{3\mathrm{tg}^2\beta}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{3}}{3}\le\mathrm{tg}(\alpha-\beta)\le\frac{\sqrt{3}}{3}\text{, đpcm.}$$

Ví dụ 8: Cho $0<x_1<x_2<..<x_n<\frac{\pi}{2}$, chứng minh rằng:

$$\mathrm{tg}x_1<\frac{\sin x_1+\sin x_2+...\sin x_n}{\cos x_1+\cos x_2+...\cos x_n}<\mathrm{tg}x_n.$$

Giải

Hàm số sinx tăng trong khoảng $(0,\frac{\pi}{2})$, do đó từ giả thiết ta được:

$$0<\sin x_1<\sin x_2<..<\sin x_n<1$$
$$\Rightarrow 0<n.\sin x_1<\sin x_1+\sin x_2+..+\sin x_n<n.\sin x_n \qquad (1)$$

Hàm số cosx giảm trong khoảng $(0,\frac{\pi}{2})$, do đó từ giả thiết ta được:

$$1>\cos x_1>\cos x_2>..>\cos x_n>0$$
$$\Rightarrow n.\cos x_1>\cos x_1+\cos x_2+..+\cos x_n>n.\cos x_n>0$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{n.\cos x_1}<\frac{1}{\cos x_1+\cos x_2+...\cos x_n}<\frac{1}{n.\cos x_n}. \qquad (2)$$

Nhận theo vế (1) và (2), ta được:

$$\mathrm{tg}x_1<\frac{\sin x_1+\sin x_2+...\sin x_n}{\cos x_1+\cos x_2+...\cos x_n}<\mathrm{tg}x_n.$$

Chú ý: Trong ví dụ trên chúng ta đã sử dụng tính đơn điệu của hàm số sin và cos để chứng minh bất đẳng thức, tuy nhiên trong những trường hợp phức tạp như đã giới thiệu trong phần kiến thức cơ bản là đối với các em học sinh đã được làm quen với khái niệm đạo hàm, sẽ có thêm một phương pháp là "*Sử dụng đạo hàm chứng minh bất đẳng thức*", bao gồm hai dạng:

Dạng 1: Sử dụng tính đơn điệu của hàm số chứng minh bất đẳng thức.

Khi đó ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lựa chọn việc xét hàm số y=f(x).

Bước 2: Tìm miền xác định của hàm số.

Bước 3: Tính đạo hàm f'(x), rồi giải phương trình f'(x)=0.

Bước 4: Lập bảng biến thiên của hàm số.

Bước 5: Kết luận cho bất đẳng thức cần chứng minh.

Dạng 2: Sử dụng tính lồi, lõm của hàm số chứng minh bất đẳng thức.

Khi đó ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lựa chọn việc xét hàm số y=f(x).

Bước 2: Tìm miền xác định của hàm số.

Bước 3: Tính đạo hàm f'(x) và f''(x).

Bước 4: Đánh giá tính lồi, lõm của hàm số

Bước 5: Kết luận cho bất đẳng thức cần chứng minh, dựa trên kết quả:

Định lý: Cho hàm số f(x) xác định trên khoảng (a, b).

1. Hàm số f(x) gọi là lồi trên khoảng đó ($f''(x)\le 0\ \forall x\in(a, b)$)

   $\Leftrightarrow\forall x_1, x_2, ... x_n\in(a, b)$ ta có

   $$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}\le f(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}),$$

   dấu bằng xảy ra khi $x_1=x_2=...=x_n$.

2. Hàm số f(x) gọi là lõm trên khoảng đó ($f''(x)\ge 0\ \forall x\in(a, b)$)

   $\Leftrightarrow\forall x_1, x_2, ... x_n\in(a, b)$ ta có

   $$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}\ge f(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}),$$

   dấu bằng xảy ra khi $x_1=x_2=...=x_n$.

Trước hết ta minh hoạ các ví dụ sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

Ví dụ 9: Cho $0<x<\frac{\pi}{2}$. CMR:

a. sinx<x.

b. tgx>x.

Giải

a. Xét hàm số

$$f(x)=\sin x-x\text{ với }0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Đạo hàm:

$$f'(x)=\cos x-1<0\text{ với }0<x<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\text{hàm số f(x) nghịch biến trên }(0,\frac{\pi}{2}).$$

Do đó:

$$f(x)<f(0)\text{ với }0<x<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\sin x-x<0\text{ với }0<x<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\sin x<x\text{ với }0<x<\frac{\pi}{2}.$$

b. Xét hàm số

$$f(x)=tgx-x \text{ với } 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Đạo hàm:

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=tg^2x>0 \text{ với } 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{hàm số } f(x) \text{ đồng biến trên } (0, \frac{\pi}{2})$$

Do đó:

$$f(x)>f(0) \text{ với } 0<x<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow tgx-x>0 \text{ với } 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow tgx>x \text{ với } 0<x<\frac{\pi}{2}. \text{ (đpcm)}$$

Chú ý. Đôi khi chúng ta không thể khẳng định được ngay rằng $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in[a, b]$ (hoặc $f'(x)\leq 0$, $\forall x\in[a, b]$), ví dụ như hàm số $f(x)=x-\frac{x^3}{6}-\sin x$ với $x>0$ ta có $f'(x)=1-\frac{x^2}{2}-\cos x$ rõ ràng không thể khẳng định được gì với $x>0$, trong các trường hợp như vậy, một thủ thuật thông thường được áp dụng là chúng ta liên tiếp tính đạo hàm để hạ bậc dần đa thức ẩn x.

Ví dụ 10: (Đề 113) CMR

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x \text{ với } x>0.$$

Giải

Xét hàm số $f(x)=x-\frac{x^3}{6}-\sin x$ với $x>0$.

Đạo hàm:

$$f'(x)=1-\frac{x^2}{2}-\cos x,$$

$$f''(x)=-x+\sin x,$$

$$f'''(x)=-1+\cos x<0 \text{ với } x>0 \Leftrightarrow f''(x) \text{ nghịch biến với } x>0$$

$$\Rightarrow f''(x)<f''(0) \text{ với } x>0 \Leftrightarrow f''(x)<0 \text{ với } x>0 \Leftrightarrow f'(x) \text{ nghịch biến với } x>0$$

$$\Rightarrow f'(x)<f'(0) \text{ với } x>0 \Leftrightarrow f'(x)<0 \text{ với } x>0 \Leftrightarrow f(x) \text{ nghịch biến với } x>0$$

$$\Rightarrow f(x)<f(0) \text{ với } x>0 \Leftrightarrow x-\frac{x^3}{6}-\sin x<0 \text{ với } x>0 \Leftrightarrow x-\frac{x^3}{6}<x \text{ với } x>0.$$

Chú ý. Trong hai ví dụ trên chúng ta đã sử dụng nguyên tắc theo chiều thuận: từ bất đẳng thức giữa a và b, dùng tính đơn điệu của hàm số f để chứng minh bất đẳng thức giữa f(a) và f(b). Bây giờ chúng ta đã sử dụng nguyên tắc theo chiều ngược lại.

Ví dụ 11: CMR

$$\sin 20^0>\frac{1}{3}.$$

Giải.

Ta có $\sin 60^0=3\sin 20^0-4\sin^3 20^0$,
do đó $\sin 20^0$ là nghiệm của phương trình

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=3x-4x^3.$$

Xét hàm số

$$f(x)=3x-4x^3,$$

Đạo hàm:

$$f'(x)=3-12x^2,$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	↘		↗		↘	$-\infty$

Ta có:

$\sin 20^0$, $\frac{1}{3}\in(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ là khoảng đồng biến của hàm số f(x),

nên:

$$\sin 20^0>\frac{1}{3} \Leftrightarrow f(\sin 20^0)>f(\frac{1}{3}) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{23}{27}$$

$$\Leftrightarrow 27\sqrt{3}>46 \Leftrightarrow 2187>2116 \text{ luôn đúng.}$$

Chú ý. Một số bài toán bất đẳng thức khi đưa về xét hàm số cần phải quan tâm tới các điểm cực trị.

Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng tính lồi, lõm của hàm số.

Ví dụ 12: Cho ΔABC. CMR

$$\sin A+\sin B+\sin C\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Giải

Xét hàm số

$$f(x)=\sin x \text{ với } x\in(0, \pi).$$

Đạo hàm:

$$f'(x)=\cos x,$$

$$f''(x)=-\sin x\leq 0\ \forall x\in(0, \pi)$$

Vậy hàm số f(x)=sinx là lồi trên (0, π), do đó: với ∀A, B, C∈(0, π) ta có:

$$\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}\leq f(\frac{A+B+C}{3}) \Leftrightarrow \frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\leq\sin(\frac{\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow \sin A+\sin B+\sin C\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ đpcm.}$$

3. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho $0\le x\le y\le\frac{\pi}{2}$ và $x+y=\frac{\pi}{2}$. CMR:

$$x.\sin x+y.\sin y\ge\frac{\pi}{4}(\sin x+\sin y).$$

Bài tập 2: Chứng minh rằng:

a. $\cos(\sin x)>\sin(\cos x)$, với $x\in[0,\ \frac{\pi}{2}]$.

b. $\cos(\sin x)>\sin(\cos x)$, với mọi x.

Bài tập 3: (Đề 113 - ĐHD Hà nội-98) CMR với $0<x<\frac{\pi}{2}$ thì

$$2^{2\sin x}+2^{\mathrm{tg}x}>2^{\frac{3x}{2}+1}.$$

Bài tập 4: Cho $0\le x,\ y,\ z\le\pi$, chứng minh rằng:

$$\sin x+\sin y+\sin z\le3\sin\frac{x+y+z}{3}.$$

Bài tập 5: Cho x, y, z>0 và thoả mãn $x+y+z<\frac{\pi}{2}$, chứng minh rằng:

$$\mathrm{tg}x.\mathrm{tg}y+\mathrm{tg}y.\mathrm{tg}z+\mathrm{tg}z.\mathrm{tg}x<1.$$

Bài tập 6: Cho x, y, z>0 và thoả mãn $x+y+z=\frac{\pi}{2}$, chứng minh rằng:

$$\sin^2x+\sin^2y+\sin^2z+3\sin x.\sin y.\sin z\le\frac{9}{8}.$$

Bài tập 7: Cho $2\cos^2x-3\cos x-3>0$, chứng minh rằng:

$$\sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)<0.$$

Bài tập 8: CMR với $0<x<\frac{\pi}{2}$ luôn có:

$$\mathrm{tg}^7x+\mathrm{cotg}^7x\ge\mathrm{tg}x+\mathrm{cotg}x.$$

Bài tập 9: CMR với x>0 thì:

a. (Đề 78) $2^{\sin x}+2^{\mathrm{tg}x}\ge2^{x+1}$.

b. $\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$,

tổng quát $\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots-\frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!}+\frac{x^{4k+5}}{(4k+5)!}$.

c. $\cos x<x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$.

Bài tập 10: (Đề 102) CMR với $0<x<\frac{\pi}{4}$ luôn có:

$$\frac{\cos x}{(\cos x-\sin x)\sin^2x}>8.$$

Bài tập 11: CMR với $0<x<\frac{\pi}{2}$ luôn có:

$$\frac{x}{2}<\mathrm{tg}\frac{x}{2}<\frac{2x}{\pi}<\sin x<x.$$

Áp dụng, cho ΔABC nhọn, chứng minh rằng:

a. $\pi(2R-r)<a.A+b.B+c.C<4(2R-r)$.

b. $2\pi p-8(R+r)<a.A+b.B+c.C<2\pi p-2\pi(2R+r)$.

c. $\frac{\pi S}{2}<(p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)<2S$.

d. $4<(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}).h_a+(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}).h_b+(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}).h_c<2\pi$.

e. $4<(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}).l_a+(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}).l_b+(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}).l_c<2\pi$.

f. $\frac{12R}{\pi}<\frac{ab}{l_c}+\frac{bc}{l_a}+\frac{ca}{l_b}<3\pi R$.

VII. BÀI TOÁN 7

Bài toán 7: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức (hàm số) lượng giác

1. PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng:

1. Tính bị chặn của các hàm số lượng giác cơ bản:

   $|\sin x|\le1$ & $0\le\sin^{2n}x\le1$, với n nguyên dương.

   $|\cos x|\le1$ & $0\le\cos^{2n}x\le1$, với n nguyên dương.

2. Tính chất của tam thức bậc hai:

   $ax^2+bx+c\le-\frac{\Delta}{4a}$, với a<0.

   $ax^2+bx+c\ge-\frac{\Delta}{4a}$, với a>0.

3. Bất đẳng thức.

2. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y=2\sin x+4.$$

Giải

Ta có $|\sin x|\le1$, do đó:

- $y_{Max}=2.1+4=6$, đạt được khi $\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$.
- $y_{Min}=2.(-1)+4=2$, đạt được khi $\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$.

Nhận xét:

1. Như vậy để xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên chúng ta đã sử dụng tính bị chặn của hàm số sinx, từ đó có thể tổng quát hoá cho dạng hàm số:

$$y=a.\sin x+b,\text{ với } a\neq 0.$$

a. Với a>0, ta được:

- $y_{Max}=a.1+b=a+b$, đạt được khi $\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$.
- $y_{Min}=a.(-1)+b=b-a$, đạt được khi $\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$.

b. Với a<0, ta được:

- $y_{Max}=a.(-1)+b=b-a$, đạt được khi $\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$.
- $y_{Min}=a.1+b=a+b$, đạt được khi $\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$.

Tương tự cho lớp hàm số $y=a.\cos x+b$, với $a\neq 0$.

2. Trong trường hợp góc x bị hạn chế, chúng ta cần thực hiện việc xác định miền giá trị cho hàm số sinx, thí dụ nếu trong ví dụ trên ta thêm điều kiện $-\frac{\pi}{6}\le x<\frac{3\pi}{4}$, ta có:

Từ $-\frac{\pi}{6}\le x<\frac{3\pi}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2}\le \sin x\le 1$, do đó:

- $y_{Max}=2.1+4=6$, đạt được khi $\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$.
- $y_{Min}=2.(-\frac{1}{2})+4=3$, đạt được khi $\sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}$.

3. Tiếp theo chúng ta xem xét ví dụ sử dụng tính chất của tam thức bậc hai.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y=1-2\cos x-2\sin^2 x.$$

Giải

Biến đổi hàm số về dạng:

$$y=2\cos^2 x-2\cos x-1.$$

Đặt $t=\cos x$, điều kiện $|t|\le 1$, ta được:

$$y=2t^2-2t-1.$$

Hoành độ đỉnh của Parabol $t_0=\frac{1}{2}\in[-1, 1]$.

Vậy:

- $y_{Min}=y(t_0)=y(\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}$ đạt được khi $\cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z$.
- $y_{Max}=\max\{y(-1), y(1)\}=3$ đạt được khi $\cos x=-1 \Leftrightarrow x=2k\pi,\ k\in Z$.

Nhận xét: Để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=1-2\cos x-2\sin^2 x$, ta biến đổi nó về hàm số bậc hai theo một hàm lượng giác rồi sử dụng tính chất đã biết về tam thức bậc hai để giải.

Tiếp theo chúng ta xem xét ví dụ rất cơ bản và có nhiều ứng dụng.

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y=a\sin x+b\cos x.$$

Giải

Ta đi tìm y để phương trình

$$a.\sin x+b.\cos x=y \qquad (1)$$

có nghiệm x.

Chia hai vế phương trình (1) cho $\sqrt{a^2+b^2}$, ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{y}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Vì $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})^2+(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})^2=1$ nên tồn tại góc β sao cho

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\beta,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\beta.$$

Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$\sin x.\cos\beta+\sin\beta.\cos x=\frac{y}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\beta)=\frac{y}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (2)$$

Phương trình (2) có nghiệm khi

$$\left|\frac{y}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1 \Leftrightarrow -\sqrt{a^2+b^2}\le y\le \sqrt{a^2+b^2}.$$

Từ đó $y_{Max}=\sqrt{a^2+b^2}$ và $y_{Min}=-\sqrt{a^2+b^2}$.

Nhận xét:

1. Kết quả trên được sử dụng với phương trình:

$$a.\sin x+b.\cos x=c$$

có nghiệm khi và chỉ khi

$$-\sqrt{a^2+b^2}\le c\le \sqrt{a^2+b^2}.$$

2. Mở rộng tự nhiên cho giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y=a\sin x+b\cos x+c$$

ta được:

- $y_{Max}=\sqrt{a^2+b^2}+c$,
- $y_{Min}=-\sqrt{a^2+b^2}+c$.

3. Ví dụ tiếp theo minh hoạ ứng dụng của kết quả trên.

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số :

$$y=\frac{\sin x+2\cos x+3}{2\sin x+\cos x+3}.$$

Giải

Ta đi tìm y để phương trình

$$\frac{\sin x+2\cos x+3}{2\sin x+\cos x+3}=y. \qquad (1)$$

có nghiệm x.

Biến đổi (1) về dạng:

$$(2y-1)\sin x+(y-2)\cos x=3-3y_0. \qquad (2)$$

Phương trình (2) có nghiệm khi

$$(3-3y)^2\le(2y-1)^2+(y-2)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\le y\le 2.$$

Từ đó:

- $y_{Max}=2$ đạt được khi $3\sin x=-3 \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z.$
- $y_{Min}=\frac{1}{2}$ đạt được khi $-\frac{3}{2}\cos x=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi,\ k\in Z.$

Chú ý: Vẫn sử dụng kết quả trên, nhưng bài toán có thể được phát biểu dưới dạng *chứng minh bất đẳng thức*, để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 5: (Đề 139): CMR với mọi x và mọi a ta có:

$$\left|\frac{\cos 3x+a\sin 3x+1}{\cos 3x+2}\right|\le\frac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3}.$$

Giải

Xét hàm số

$$y=\frac{\cos 3x+a\sin 3x+1}{\cos 3x+2}.$$

Hàm số xác định với mọi x.

Ta đi tìm điều kiện của y để phương trình có nghiệm đối với ẩn x

$$\frac{\cos 3x+a\sin 3x+1}{\cos 3x+2}=y \Leftrightarrow a\sin 3x+(1-y)\cos 3x=2y-1 \qquad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow a^2+(1-y)^2\ge(2y-1)^2 \Leftrightarrow 3y^2-2y-a^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{1+3a^2}}{3}\le y\le\frac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3}.$$

Vậy, $|y|\le\frac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3}$ (đpcm).

Ví dụ 6: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y=2(1+\sin 2x.\cos 4x)-\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 8x).$$

Giải

Biến đổi S về dạng:

$$y=2(1+\sin 2x.\cos 4x)-\frac{1}{2}(2\cos^2 2x-1-2\cos^2 4x+1)$$

$$=\cos^2 4x+2\sin 2x.\cos 4x+\sin^2 2x+1=(\cos 4x+\sin 2x)^2+1$$

$$=(2\sin^2 2x-\sin 2x-1)^2+1.$$

Từ đó:

- $y_{Min}=1$, đạt được khi:

$$2\sin^2 2x-\sin 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=1\\ \sin 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ 2x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ 2x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\frac{7\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.,\ k\in Z.$$

- $y_{Max}=4+1=5$, đạt được khi:

$$\sin 2x=-1 \Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$$

Ví dụ 7: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y=\sin^{10}x+\cos^{10}x.$$

Giải

Ta đưa hàm số về dạng:

$$y=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5=\frac{1}{16}(1+10\cos^2 2x+5\cos^4 2x)$$

$$=\frac{1}{16}[5(\cos^2 2x+1)^2-4].$$

Từ trên, ta có:

$$y\le\frac{1}{16}[5(1+1)^2-4]=1,$$

suy ra $y_{Max}=1$ đạt được khi $\cos^2 2x=1 \Leftrightarrow \sin 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in Z.$

$$y\ge\frac{1}{16}[5(0+1)^2-4]=\frac{1}{16},$$

suy ra $y_{Min}=\frac{1}{16}$ đạt được khi

$$\cos 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in Z.$$

Chú ý: Nếu bài toán chỉ yêu cầu tìm giá trị lớn nhất của hàm số, ta có thể sử dụng nhận xét sau cho dạng tổng quát:

$$y=\sin^{2n}x+\cos^{2n}x,\ \text{n nguyên dương lớn hơn 1.}$$

Ta có:

$$\begin{cases}\sin^{2n}x\le\sin^2 x\\ \cos^{2n}x\le\cos^2 x\end{cases} \Rightarrow \sin^{2n}x+\cos^{2n}x\le\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

Vậy $y_{Max}=1$ đạt được khi

$$\begin{cases}\sin^{2n}x=\sin^2 x\\ \cos^{2n}x=\cos^2 x\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in Z.$$

Ví dụ 8: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y=\frac{1}{|\sin x|}+\frac{1}{|\cos x|}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\geq 2.\frac{1}{|\sin x|}.\frac{1}{|\cos x|}=\frac{4}{|\sin 2x|}\geq 4.$$

Từ đó suy ra:

$$\left(\frac{1}{|\sin x|}+\frac{1}{|\cos x|}\right)^2=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}+2.\frac{1}{|\sin x|}.\frac{1}{|\cos x|}\geq 4+2.2=8$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\sin x|}+\frac{1}{|\cos x|}\geq 2\sqrt{2},$$

do đó:

- $y_{Min}=2\sqrt{2}$ đạt được khi $|\sin x|=|\cos x| \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$.

Ví dụ 9: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số :

$$y=\sqrt{\cos^2 x+7\sin^2 x}+\sqrt{\sin^2 x+7\cos^2 x}.$$

Giải

Ta có $y\geq 0$, và do đó:

$$y^2=8+2\sqrt{(\cos^2 x+7\sin^2 x)(\sin^2 x+7\cos^2 x)}=8+2\sqrt{7+9\sin^2 2x}$$

Từ đó

$$8+2\sqrt{7}\leq y^2\leq 16 \Leftrightarrow 1+\sqrt{7}\leq y\leq 4.$$

suy ra:

- $y_{Max}=4$ đạt được khi $\sin^2 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$.
- $y_{Min}=1+\sqrt{7}$ đạt được khi $\sin 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$.

Ví dụ 10: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\cos x+\cos y-\cos(x+y).$$

Giải

Ta đi biến đổi biểu thức về dạng:

$$P=\cos x+\cos y-\cos(x+y)=2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}-(2\cos^2\frac{x+y}{2}-1)$$

$$=-2(\cos^2\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{x-y}{2})+\frac{1}{2}\cos^2\frac{x-y}{2}+1$$

$$=-2(\cos\frac{x+y}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2})^2+\frac{1}{2}\cos^2\frac{x-y}{2}+1.$$

Từ đó, vì:

$$0\leq(\cos\frac{x+y}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2})^2\leq(1+\frac{1}{2})^2=\frac{9}{4} \text{ và } 0\leq\cos^2\frac{x-y}{2}\leq 1,$$

ta được $-3\leq y\leq\frac{3}{2}$.

Từ đó:

- $y_{Max}=\frac{3}{2}$ đặt được khi

$$\begin{cases}\cos\frac{x+y}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2}=0\\ \cos^2\frac{x-y}{2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z.$$

- $y_{Min}=-3$ đạt được khi:

$$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x+y}{2}=1\ \&\ \cos\frac{x-y}{2}=-1\\ \cos\frac{x+y}{2}=-1\ \&\ \cos\frac{x-y}{2}=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=4k\pi\\ x-y=2\pi+4l\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=2\pi+4k\pi\\ x-y=4l\pi\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\pi+2(k+l)\pi\\ y=-\pi+2(k-l)\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=\pi+2(k+l)\pi\\ y=\pi+2(k-l)\pi\end{cases}\end{array}\right.,\ k, l\in Z.$$

Ví dụ 11: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số :

$$f(x, y)=\frac{\sin x-\sin y}{1-\sin x\sin y}, \text{ trong đó } 0\leq x, y\leq\frac{\pi}{2}, xy\neq\frac{\pi}{4}.$$

Giải

Từ giả thiết ta có $\sin x.\sin y<1$, và:

$$(\sin^2 x-1)(\sin^2 y-1)\geq 0 \Leftrightarrow \sin^2 x\sin^2 y+1\geq\sin^2 x+\sin^2 y$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x\sin^2 y-2\sin x.\sin y+1\geq\sin^2 x-2\sin x.\sin y+\sin^2 y$$

$$\Leftrightarrow (\sin x.\sin y-1)^2\geq(\sin x-\sin y)^2$$

Vậy:

$$\left(\frac{\sin x-\sin y}{1-\sin x\sin y}\right)^2\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq\frac{\sin x-\sin y}{1-\sin x\sin y}\leq 1$$

Từ trên, ta có:

- $f_{Max}=1$ đạt được khi $x=\frac{\pi}{2}$ và $0\leq y<\frac{\pi}{2}$.
- $f_{Min}=-1$ đạt được khi $y=\frac{\pi}{2}$ và $0\leq x<\frac{\pi}{2}$

Ví dụ 12: Cho cosx+cosy=1, tìm giá trịlớn nhất và nhỏ nhất của:

$$S=\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}.$$

Giải

Gọi s là một giá trị bất kỳ của S, ta đi tìm s để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases}\cos x+\cos y=1\\ \cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}=s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\cos^2\frac{x}{2}-1+\cos^2\frac{y}{2}-1=1\\ \cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}=s\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{y}{2}=\frac{3}{2} \\ \cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}=s \end{cases} \qquad (I)$$

Đặt u=cos$\frac{x}{2}$ và v=cos$\frac{y}{2}$ (điều kiện |u|, |v|≤1), ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+v^2=3/2 & (1) \\ u+u=s & (2) \\ |u|\le 1, |v|\le 1 & (3) \end{cases}. \qquad (II$$

Nhận xét rằng:

- (1) là phương trình của đường tròn tâm O, bán kính R=$\frac{\sqrt{6}}{2}$.
- (2) là phương trình của đường thẳng (d).

Xét các điểm A(1, 0) và B(0, 1)

Khi đó hệ có nghiệm

$$\Leftrightarrow d(O, AB)\le d(O, d)\le R \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\le\frac{s}{\sqrt{2}}\le\frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow 1\le s\le\sqrt{6}.$$

Vậy MaxS=$\sqrt{6}$ & MinS=1.

Ví dụ 13: Cho $\sin^2x+\sin^2y=\frac{1}{2}$, tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

$S=tg^2x+tg^2y$.

Giải

Gọi s là một giá trị bất kỳ của S, ta đi tìm s để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} tg^2x+tg^2y=s \\ \sin^2x+\sin^2y=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\cos^2x}-1+\frac{1}{\cos^2y}-1=s \\ 1-\cos^2x+1-\cos^2y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\cos^2y}=s+2 \\ \cos^2x+\cos^2y=3/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2x+\cos^2y=3/2 \\ \cos^2x.\cos^2y=\frac{3}{2(s+2)} \end{cases}. \qquad (1)$$

$\Leftrightarrow \cos^2x, \cos^2y$ là nghiệm của phương trình:

$$f(t)=t^2-\frac{3}{2}t+\frac{3}{2(s+2)}=0. \qquad (1$$

Vậy điều kiện là phương trình (1) có nghiệm t_1, t_2 thoả mãn $0\le t_1\le t_2\le 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'\ge 0 \\ af(0)\ge 0 \\ af(1)\ge 0 \\ 0\le S/2\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\le y\le 1.$$

Vậy MaxS=1 & MinS=$\frac{2}{3}$.

Ví dụ 14: Cho x, y là góc nhọn sao cho tgx=3tgy, tìm giá trị lớn nhất của:

z=x-y.

Giải

Từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} x, y\in(0, \frac{\pi}{2}) \\ tgy=tgx \end{cases} \Rightarrow tgy>tgx \Rightarrow y>x \Rightarrow 0<y-x<\frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Ta có:

$$tg(y-x)=\frac{tgy-tgx}{1-tgy.tgx}=\frac{2tgx}{1-tgy.tgx}. \qquad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$1+3tg^2x\ge 2\sqrt{3tg^2x}=2\sqrt{3}\,tgx. \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta được:

$$tg(y-x)\le\frac{2tgx}{2\sqrt{3}tgx}=\frac{1}{\sqrt{3}}=tg\frac{\pi}{6} \Rightarrow y-x\le\frac{\pi}{6}.$$

Vậy maxz=$\frac{\pi}{6}$, đạt được khi

$$\begin{cases} tgx=\frac{1}{\sqrt{3}} \\ tgy=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6} \\ y=\frac{\pi}{3} \end{cases}.$$

Chú ý: Ngoài những phương pháp trên, như đã giới thiệu trong phần kiến thức cơ bản chúng ta còn có được một công cụ rất hiệu quả để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số, đó là việc sử dụng đạo hàm, các ví dụ sau sẽ minh hoạ cho phương pháp này.

Ví dụ 15: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số

$$y=\sin2x-x \text{ trên } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Giải

Miền xác định D=R.

Đạo hàm:

$$y'=2\cos2x-1 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 2\cos2x-1=0 \Leftrightarrow \cos2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}.$$

Ta lại có:

$$f(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}, f(-\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}, f(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6} \text{ và } f(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}.$$

Vậy:

- Maxy= $Max\{\frac{\pi}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\}=\frac{\pi}{2}$ đạt được khi x=$-\frac{\pi}{2}$.
- Miny= $Min\{\frac{\pi}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\}=-\frac{\pi}{2}$ đạt được khi x=$\frac{\pi}{2}$.

Chú ý: Nhiều bài toán chúng ta cần đặt đối số mới X để đưa về xét hàm số y=F(X) đơn giản hơn. Khi đó lưu ý phải xét tập giá trị X để xét y=F(X) trên tập giá trị của X mà thôi - Phương pháp này được gọi là phương pháp gián tiếp. nó sẽ được minh hoạ bằng ví dụ sau:

Ví dụ 16: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số

$$y=\frac{1+\sin^6 x+\cos^6 x}{1+\sin^4 x+\cos^4 x}.$$

Giải

Biến đổi hàm số về dạng:

$$y=\frac{2-\frac{3}{4}\sin^2 2x}{2-\frac{1}{2}\sin^2 2x}.$$

Đặt $X=\sin^2 2x$ điều kiện $0\le X\le 1$. Khi đó:

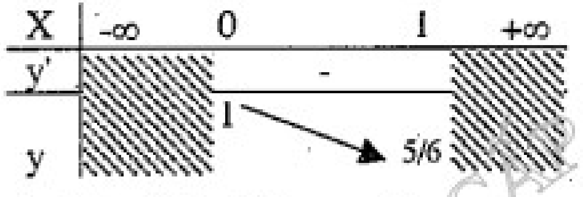
$$y=F(X)=\frac{2-\frac{3}{4}X}{2-\frac{1}{2}X}=\frac{3X-8}{2X-8}.$$

Miền xác định D=[0, 1].

Đạo hàm:

$$y'=\frac{-8}{(2X-8)^2}<0,\ \forall X\in D. \Rightarrow$$ hàm số nghịch biến trên D.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

- Miny= $F(1)=\frac{5}{6}$ đạt được khi

$$X=1 \Leftrightarrow \sin^2 2x=1 \Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}.$$

- Maxy= F(0)=1 đạt được khi

$$X=0 \Leftrightarrow \sin^2 2x=0 \Leftrightarrow \sin 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}.$$

3. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a. $y=\sin x-1$.

b. $y=3\cos 2x+2$.

c. $y=-2\sin x+4$, với $\frac{\pi}{6}<x\le\frac{7\pi}{6}$.

d. $y=4\cos 2x-1$, với $\frac{\pi}{12}\le x<\frac{5\pi}{8}$.

Bài tập 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau:

a. $y=3\sqrt{1+\cos x}+2$.

b. $y=2+2\sin x+\cos^2 x$.

c. $y=\sin^2 x+2\sin x+5$.

d. $y=-\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{a}{2}\sin x+1$.

e. $y=\sin x-\cos^2 x+\frac{1}{2}$.

Bài tập 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a. (HVCNBCVT/Đề 1-99): $y=2\sin^2 x+4\sin x.\cos x+\sqrt{5}$.

b. $y=a\sin^2 x+b\sin x.\cos x+c.\cos^2 x$.

c. $y=a.\cos^4 x+b.\sin^4 x$ với $0<a\le b$.

Bài tập 4: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a. $y=\frac{3\sin x}{2+\cos x}$.

b. (ĐHSP QN-99): $y=\frac{\sin x}{2+\cos x}$ với $x\in[0, \pi]$.

c. (ĐHGT/Đề 2-97): $y=1+\frac{3\sin x}{2+\cos x}$.

d. (Đề 31): $y=\frac{2+\cos x}{\sin x+\cos x-2}$.

e. (Đề 67): $y=\frac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4}$ với $-\pi<x<\pi$.

f. (ĐHKT Hà nội-1998) : $A=\frac{2\cos^2 x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$.

Bài tập 5: (ĐHBK HN):

a. Cho $a+b\ge 0$, chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

b. Cho ΔABC, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin B}+\sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}}.$$

Bài tập 6: (ĐHGT-1998): Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

$$y=\sin\frac{2x}{1+x^2}+\cos\frac{4x}{1+x^2}+1.$$

Bài tập 7: (Đề 96): Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y=\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}.$$

Bài tập 8: Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số:

a. (Đề 134) : $y=\sin x+3\sin 2x$.

b. $y=\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{1+2\sin x}$.

c. $y=\cos 3x+2\sin^2\frac{x}{2}$.

d. (ĐHCSND - 2001): $y=5\cos x-\cos 5x$ trên đoạn $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$.

Bài tập 9: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a. $y=|1-2\cos x|+|1-2\sin x|$.

(Đề 84): $y=|1+2\cos x|+|1+2\sin x|$.

c. (ĐHL - 99): $y=\sin^{20}x+\cos^{20}x$.

d. (ĐHD - 2001): $y=2(1+\sin 2x.\cos 4x)-\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 8x)$.

e. (ĐHSP I - 2001): $y=\frac{3\cos^4 x+4\sin^2 x}{3\sin^4 x+4\cos^2 x}$.

Bài tập 10: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số

$$y=\frac{\cos x}{2+\sin x} \text{ với } x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}].$$

Bài tập 11: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a. (HVNH - 98): $y=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$ với $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

b. (HHVCNBCVT - 99): $y=2\sin^2 x+4\sin x.\cos x+\sqrt{5}$.

c. (ĐHKTQD - 99): $y=4x+\frac{9\pi^2}{x}+\sin x$ trên khoảng $(0,+\infty)$.

Bài tập 12: (Đề 34): Tìm K để giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y=\frac{K\sin x+1}{\cos x+2}$$

nhỏ hơn -1.

Bài tập 13: Cho hàm số:

$$y=\frac{2k\sin x+k}{\cos x+\sin x+2}.$$

a. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số với k=1.

b. Xác định k sao cho giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 14: (ĐHQG-96): Cho hàm số :

$$y=\frac{2k\cos x+k+1}{\cos x+\sin x+2}.$$

a. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số với k=1.

b. Xác định k sao cho giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 15: Cho hàm số:

$$y=\frac{a\cos 3x-\sin 3x+1}{\cos 3x+2}.$$

a. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số .

b. Xác định a để giá trị lớn nhất của hàm số nhỏ hớn hoặc bằng 1.

Bài tập 16: (Đề 59): Với $a\geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y=\sqrt{a+\cos x}+\sqrt{a+\sin x}.$$

Bài tập 17: (ĐHQGTPHCM/Đợt I - 1999): Cho hàm số:

$$f(x)=\cos^2 2x+2(\sin x+\cos x)^2-3\sin 2x+m.$$

Tính theo m giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của f(x). Từ đó tìm m sao cho $f^2(x)\leq 36\ \forall x$.

CHƯƠNG II

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Cho ΔABC, với các góc A, B, C, tương ứng:

- Các cạnh là a, b, c.
- Các đường trung tuyến m_a, m_b, m_c.
- Các đường cao h_a, h_b, h_c.
- Các đường phân giác l_a, l_b, l_c.

ta có các hệ thức sau:

1. ĐỊNH LÝ HÀM SỐ COSIN

- $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.
- $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$.
- $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

2. ĐỊNH LÝ HÀM SỐ SIN

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

3. ĐỊNH LÝ TRUNG TUYẾN

- $b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}$,
- $c^2+a^2=2m_b^2+\frac{b^2}{2}$,
- $a^2+b^2=2m_c^2+\frac{c^2}{2}$.

4. ĐỊNH LÝ ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

Phân giác trong

- $l_A=\frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}$,
- $l_B=\frac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{a+c}$,
- $l_C=\frac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{a+b}$.

Phân giác ngoài

- $l'_A=\frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{|b-c|}$,
- $l'_B=\frac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{|a-c|}$,
- $l'_C=\frac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{|a-b|}$.

5. ĐỊNH LÝ HÌNH CHIẾU

- $a=b.\cos C+c.\cos B$.
- $b=c.\cos A+a.\cos C$.
- $c=a.\cos B+b.\cos A$.

6. CÔNG THỨC VỀ DIỆN TÍCH

- $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$.
- $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$
- $S=\frac{abc}{4R}$
- $S=pr=p(p-a)\text{tg}\frac{A}{2}=p(p-b)\text{tg}\frac{B}{2}=p(p-c)\text{tg}\frac{C}{2}$.

  với p là nửa chu vi tam giác, r bán kính đường tròn nội tiếp)
- $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

7. CÔNG THỨC BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C},$$

$$R=\frac{abc}{4S}.$$

8. CÔNG THỨC BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

$$r=\frac{S}{p},$$

$$r=(p-a)\,\text{tg}\frac{A}{2}=(p-b)\,\text{tg}\frac{B}{2}=(p-c)\,\text{tg}\frac{C}{2}.$$

CHỦ ĐỀ 1

ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Chứng minh đẳng thức lượng giác trong tam giác

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Muốn chứng minh một đẳng thức lượng giác trong tam giác ngoài việc vận dụng thành thạo các phép biến đổi lượng giác chúng ta còn cần phải nhớ các hệ thức cơ bản cho ΔABC bao gồm:

1. Định lý hàm số cosin

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.
$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$.
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

2. Định lý hàm số sin

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

3. Định lý hình chiếu

$a=b.\cos C+c.\cos B$.
$b=c.\cos A+a.\cos C$.
$c=a.\cos B+b.\cos A$.

Trong bài toán này ta thương chia thành ba dạng nhỏ, bao gồm:

Dạng 1: Chứng minh hệ thức lượng giác liên hệ giữa các góc.

Với dạng toán này chúng ta cần đặc biệt lưu ý tới:

- $A+B+C=\pi \Rightarrow A+B=\pi-C$ & $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$ do đó:

  $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$,

  $\sin\frac{A+B}{2}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})=\cos\frac{C}{2}$,...
- Với các đẳng thức lượng giác chứa một hàm số lượng giác của ba góc (sin hoặc cos) ta thường chỉ biến đổi hai nhân tử còn nhân tử thứ ba sẽ được xác định qua một vài phép biến đổi sau đó, và thường không sử dụng phép biến đổi tích thành tổng hoặc tổng thành tích khi có mặt cả ba góc A, B, C. Điều này sẽ được minh hoạ cùng với lời hướng dẫn cụ thể thông qua ví dụ 1.
- Với các đẳng thức lượng giác chứa một hàm số lượng giác của ba góc (tg hoặc cotg) ta thường sử dụng phép biến đổi tương đương để đưa đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức luôn đúng hoặc ngược lại (xuất phát từ một đẳng thức luôn đúng).

Dạng 2: Chứng minh hệ thức lượng giác liên hệ giữa góc và cạnh.
Với dạng toán này chúng ta thường sử dụng định lý hàm số sin và định lý hàm số cos.

Dạng 3: Chứng minh hệ thức lượng giác liên hệ tới nhiều yếu tố trong tam giác.
Với dạng toán này chúng ta cần nhớ lại các kết quả của

- Định lý đường trung tuyến, ví dụ:

$$b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}.$$

- Định lý đường phân giác, ví dụ:

$$l_A=\frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

- Định lý về diện tích tam giác, ví dụ:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{abc}{4R}=pr=p(p-a)\text{tg}\frac{A}{2}$$
$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- Các công thức tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác:

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{4S}.$$
$$r=\frac{S}{p}=(p-a)\ \text{tg}\frac{A}{2}.$$

Chú ý: Có một phương pháp để chứng minh các đẳng thức lượng giác mà trong nhiều trường hợp tỏ ra rất hiệu quả là *phương pháp hình học*.

II.VÍ DỤ MINH HOẠ

Trước hết chúng ta xem xét các ví dụ về hệ thức lượng giác liên hệ giữa các góc.

Ví dụ 1: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.$$

Giải

Ta có:

$$VT=\cos A+\cos B+\cos C=(\cos A+\cos B)+\cos C$$
$$=2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}+\cos C=2\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}).\cos\frac{A-B}{2}+\cos C$$
$$=2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2}+(1-2\sin^2\frac{C}{2})=1-2\sin\frac{C}{2}(\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2})$$

$$=1-2\sin\frac{C}{2}[\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2})-\cos\frac{A-B}{2}]$$
$$=1-2\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2})=1+4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.$$

Hướng dẫn cách thực hiện:

Bước 1: Vì VT có cosA, cosB, cosC ta lựa chọn phép biến đổi tổng thành tích cho hai toán tử cosA, cosB còn cosC sẽ lựa chọn phép biến đổi sau.

Bước 2: Thông qua việc biến đổi

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$$

ta nhận thấy sự xuất hiện của $\sin\frac{C}{2}$, do đó lựa chọn phép biến đổi cho

$$\cos C=1-2\sin^2\frac{C}{2}.$$

Bước 3: Tiếp theo ta có sự xuất hiện

$$\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}$$

Vì sự có mặt của cả ba góc A, B, C, do vậy ta cần tìm cách đưa về biến đổi hai góc bằng phép thay $\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}$.

Chúng ta sẽ thực hiện thêm một ví dụ nữa để hiểu hơn.

Ví dụ 2: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2+2\cos A.\cos B.\cos C.$$

Giải

Ta có:

$$VT=\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\sin^2C$$
$$=1-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\sin^2C=1-\cos(A+B).\cos(A-B)+\sin^2C$$
$$=1-\cos(\pi-C).\cos(A-B)+\sin^2C=1+\cos C.\cos(A-B)+1-\cos^2C$$
$$=2+[\cos(A-B)-\cos C].\cos C=2+[\cos(A-B)+\cos(A+B)].\cos C$$
$$=2+2\cos A.\cos B.\cos C.$$

Nhận xét:

1. Như vậy vẫn với ý tưởng được trình bày sau ví dụ 1, ta thực hiện phép biến đổi cho $\sin^2A$ và $\sin^2B$, tuy nhiên không tồn tại phép biến đổi lượng giác cho hai toán tử bậc cao, do vậy ở đây ta đã sử dụng công thức hạ bậc để thực hiện.
2. Khi có sự xuất hiện của cosC ta lại lựa chọn phép biến đổi

$$\sin^2C=1-\cos^2C.$$

3. *Cuối cùng với cos(A-B)-cosC, ta lựa chọn cosC=-cos(A+B).*

4. *Kết quả của ví dụ trên được sử dụng để xác định dạng của ΔABC khi so* sánh tổng $S=\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$ với 2, cụ thể:

- Nếu $S>2 \Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos C>0 \Leftrightarrow \cos A, \cos B, \cos C>0$

  $\Leftrightarrow$ ΔABC nhọn.
- Nếu $S=2 \Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos C=0 \Leftrightarrow \cos A=0 \vee \cos B=0 \vee \cos C=0$

  $\Leftrightarrow$ ΔABC vuông.
- Nếu $S<2 \Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos C<0 \Leftrightarrow$ một trong ba cosA, cosB, cosC nhỏ hơn không

  $\Leftrightarrow$ ΔABC tù.

5. Việc lựa chọn phương pháp hạ bậc cũng rất quan trọng, để minh hoạ ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\sin^3A.\cos(B-C)+\sin^3B.\cos(C-A)+\sin^3C.\cos(A-B)=$$
$$=3\sin A.\sin B.\sin C.$$

Giải

Ta có:

$$\sin^3A.\cos(B-C)=\sin^2A.\sin A.\cos(B-C)=\frac{1-\cos 2A}{2}\sin(B+C).\cos(B-C)$$
$$=\frac{1}{4}(1-\cos 2A)(\sin 2B+\sin 2C)$$
$$=\frac{1}{4}(\sin 2B+\sin 2C-\sin 2B.\cos 2A-\sin 2C.\cos 2A). \qquad (1)$$

tương tự:

$$\sin^3B.\cos(C-A)=\frac{1}{4}(\sin 2C+\sin 2A-\sin 2C.\cos 2B-\sin 2A.\cos 2B). \qquad (2)$$
$$\sin^3C.\cos(A-B)=\frac{1}{4}(\sin 2A+\sin 2B-\sin 2A.\cos 2C-\sin 2B.\cos 2C). \qquad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được:

$$\sin^3A.\cos(B-C)+\sin^3B.\cos(C-A)+\sin^3C.\cos(A-B)=$$
$$=\frac{3}{4}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=3\sin A.\sin B.\sin C,\ \text{đpcm}.$$

Chú ý: Trong ví dụ trên chúng ta đã sử dụng kết quả:

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A.\sin B.\sin C$ - *Đề nghị bạn đọc chứng minh.*

Ví dụ 4: Cho ΔABC không vuông, chứng minh rằng:

$$\text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C=\text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C. \qquad (*)$$

Giải

Ta có:

$$A+B+C=\pi \Leftrightarrow A+B=\pi-C \Rightarrow \text{tg}(A+B)=\text{tg}(\pi-C)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{tg}A+\text{tg}B}{1-\text{tg}A.\text{tg}B}=-\text{tg}C \Leftrightarrow \text{tg}A+\text{tg}B=(1-\text{tg}A.\text{tg}B)\text{tg}C$$
$$\Leftrightarrow \text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C=\text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C.$$

Nhận xét:

1. Như vậy xuất phát từ một đẳng thức luôn đúng $A+B+C=\pi$, ta đã chứng minh được (*).

2. Phương pháp chứng minh trên được sử dụng để chứng minh kết quả tổng quát:

$$\text{tg}nA+\text{tg}nB+\text{tg}nC=\text{tg}nA.\text{tg}nB.\text{tg}nC,\ \text{với n nguyên dương.}$$

3. Thông qua bốn ví dụ trên chúng ta đã có được phương pháp luận cho dạng toán thứ nhất " *Chứng minh hệ thức lượng giác liên hệ giữa các góc*." Các ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ quan tâm tới dạng toán 2.

Ví dụ 5: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\frac{\cos A}{b.\cos C+c.\cos B}+\frac{\cos B}{c.\cos A+a.\cos C}+\frac{\cos C}{a.\cos B+b.\cos A}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$$

Giải

Sử dụng công thức hình chiếu, ta được:

$$\text{VT}=\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}$$
$$=\frac{bc.\cos A+ac.\cos B+ab.\cos C}{abc}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)+\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)+\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)}{abc}$$
$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$$

Ví dụ 6: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B-C}{2}.$$

Giải

Ta có:

$$\text{VT}=\frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}=\frac{2R\sin B-2R\sin C}{2R\sin A}\cos\frac{A}{2}$$
$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}.\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}}\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B-C}{2}.$$

Nhận xét: Như vậy bằng việc sử dụng định lý hàm số sin thuần tuý ta đã chứng minh được đẳng thức. Tuy nhiên điều cần bàn ở đây là cần vận dụng thật linh hoạt để đạt được mục đích thông qua việc đánh giá *điểm xuất phát* và *đích cần tiến tới*, thí dụ như:

1. Khi cần biến đổi a thành b ta sử dụng:

$$a=\frac{b.\sin A}{\sin B}.$$

2. Nếu điểm xuất phát chứa a^2 và đích cần tiến tới chứa ab thì ta thường

$$a^2=a.a=a.\frac{b.\sin A}{\sin B}.$$

Để minh hoạ chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 7: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. b.cosB+c.cosC=a.cos(B-c).

b. $a^2\sin2B+b^2\sin2A=2ab.\sin C$.

Giải

a. Ta có:

$$VT=b.\cos B+c.\cos C=\frac{a.\sin B}{\sin A}.\cos B+\frac{a.\sin C}{\sin A}.\cos C$$

$$=\frac{a}{2\sin A}(\sin2B+\sin2C)=\frac{a}{\sin A}.\sin(B+C).\cos(B-C)=a.\cos(B-c).$$

b. Ta có:

$$VT=a^2\sin2B+b^2\sin2A=a.a.\sin2B+b.b.\sin2A$$

$$=a.\frac{b.\sin A}{\sin B}.2\sin B.\cos B+b.\frac{a.\sin B}{\sin A}.2\sin A.\cos A$$

$$=2ab(\sin A.\cos B+\sin B.\cos A)=2ab.\sin(A+B)=2ab.\sin C.$$

Chú ý:

1. Kết quả của câu b) được sử dụng để chứng minh:

$$S=\frac{1}{4}(a^2\sin2B+b^2\sin2A).$$

2. Khi cần sử dụng tới các biến đổi hữu tỉ, chúng ta cần nhớ phép biến đổi rất hiệu quả:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}.$$

Để minh hoạ chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 8: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$R=\frac{p}{4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$$\Leftrightarrow R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}=\frac{a+b+c}{2(\sin A+\sin B+\sin C)}$$

$$=\frac{\frac{a+b+c}{2}}{4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}=\frac{p}{4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}.$$

Chú ý:

1. Trong ví dụ trên chúng ta đã sử dụng kết quả:

$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$ - *Đề nghị bạn đọc chứng minh.*

2. Các ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ quan tâm tới hệ thức lượng giác liên hệ tới nhiều yếu tố trong tam giác.

Ví dụ 9: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}=\frac{r+4R}{p}.$$

Giải

Ta có:

$$VT=\frac{1}{2}(tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2})+\frac{1}{2}(tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2})+\frac{1}{2}(tg\frac{C}{2}+tg\frac{A}{2})$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}}+\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{C+A}{2}}{\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}}]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}}+\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}}]$$

$$=\frac{\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}=\frac{3+\cos A+\cos B+\cos C}{4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{4+4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{R\left(4+4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\right)}{R(\sin A+\sin B+\sin C)}$$

$$=\frac{r+4R}{p}.$$

Chú ý: Trong lời giải trên chúng ta đã sử dụng hai đẳng thức:

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.$$

Ví dụ 10: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

Giải

Ta có:

$$2m_a^2=b^2+c^2-\frac{a^2}{2}. \qquad (1)$$

$$2m_b^2=c^2+a^2-\frac{b^2}{2}. \qquad (2)$$

$$2m_c^2=a^2+b^2-\frac{c^2}{2}. \qquad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta thu được đẳng thức cần chứng minh.

***Chú ý*:** Chúng ta đều biết rằng diện tích tam giác được xác định bằng nhiều công thức khác nhau:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{abc}{4R}=pr=p(p-a)\text{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

do vậy có thể thấy được vai trò trung gian rất quan trọng của nó trong việc chứng minh hệ thức lượng giác liên hệ tới nhiều yếu tố trong tam giác, để minh hoạ chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 11: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}. \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c=pr$$

suy ra:

$$\frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S},\ \frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S},\ \frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S}, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{r}=\frac{p}{S}=\frac{a+b+c}{2S}. \qquad (3)$$

Thay (2) và (3) vào (1) ta được điều cần chứng minh.

Ví dụ 12: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$r=p\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2}. \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$S=pr=p(p-a)\text{tg}\frac{A}{2}=p(p-b)\text{tg}\frac{B}{2}=p(p-c)\text{tg}\frac{C}{2}$$

suy ra:

$$S^3=p(p-a)\text{tg}\frac{A}{2}.p(p-b)\text{tg}\frac{B}{2}.p(p-c)\text{tg}\frac{C}{2}=S^2.p^2\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow p^2\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2}=S=pr$$

$$\Leftrightarrow p\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2}=r,\ \text{đpcm}.$$

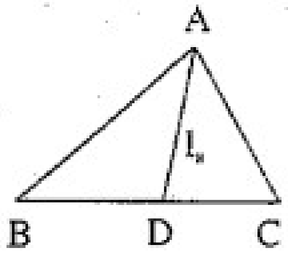
***Chú ý*:** Thông qua hai ví dụ trên chúng ta đã thấy được vai trò trung gian quan trọng của công thức tính diện tích tam giác, ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ thêm việc sử dụng biểu thức diện tích để chứng minh hệ thức lượng giác khác.

Ví dụ 13: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$l_a=\frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}. \qquad (1)$$

Giải

Gọi D là chân đường phân giác trong của góc A, ta có:



$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ACD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}bc.\sin A=\frac{1}{2}l_a c\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}l_a b\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow bc.\sin A=l_a(c+b)\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow l_a=\frac{2bc.\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{A}{2}}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}=\frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

***Chú ý*:**

1. Kết quả của ví dụ được áp dụng để thực hiện yêu cầu:

" *Cho ΔABC vuông tại A, chứng minh rằng*

$$l_b.l_c=4a^2.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}."$$

Thật vậy, bằng cách chứng minh như trong ví dụ ta được:

$$l_b=\frac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{a+c}\ \&\ l_c=\frac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

suy ra

$$l_b.l_c=\frac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{a+c}.\frac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{a+b}=4a^2.\frac{\sin C.\cos\frac{B}{2}.\sin B.\cos\frac{C}{2}}{(\sin A+\sin C)(\sin A+\sin B)}$$

$$=4a^2.\frac{\sin C.\cos\frac{B}{2}.\sin B.\cos\frac{C}{2}}{4\sin\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A-C}{2}.\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$=4a^2.\frac{4\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}{4\mathrm{co}\frac{B}{2}.\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}).\cos\frac{C}{2}.\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2})}$$

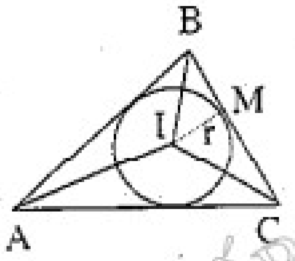
$$=4a^2.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.\frac{\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}}{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{2})+\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=4a^2.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.\frac{\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{B-C}{2}}4a^2.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.$$

2. Thông qua ví dụ chúng đã bước đầu tiếp cận với việc sử dụng phương pháp hình học để chứng minh đẳng thức lượng giác trong tam giác, ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ thêm việc sử dụng phương pháp này.

Ví dụ 14: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$r=\frac{a.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$



Giải

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Xét ΔIBC, ta có:

$$\frac{IB}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{BC}{\sin B\hat{I}C}=\frac{a}{\sin\frac{B+C}{2}}=\frac{a}{\cos\frac{A}{2}}\Leftrightarrow IB=\frac{a.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}. \qquad (1)$$

Mặt khác:

$$IB=\frac{r}{\sin\frac{B}{2}}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{a.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{r}{\sin\frac{B}{2}}\Leftrightarrow r=\frac{a.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

Cách 2: Giả sử đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với BC tại M, ta có:

$$a=BC=BM+MC=r.\mathrm{cotg}\frac{B}{2}+r.\mathrm{cotg}\frac{C}{2}=\frac{r.\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}=\frac{r.\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow r=\frac{a.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

Nhận xét:

1. Việc lựa chọn ví dụ trên với hai cách giải cùng sử dụng phương pháp hình học, nhằm mục đích giúp các em học sinh nhận ra rằng việc *đặt vấn đề cho điểm xuất phát* sẽ giúp nhận được lời giải ngắn gọn và tường minh.
2. Kết quả trên được sử dụng để chứng minh

"Trong ΔABC luôn có:

$$1+\frac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C."$$

Thật vậy, từ kết quả của ví dụ

$$r=\frac{a.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\Leftrightarrow\frac{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{r}{a}=\frac{r}{2R.\sin A}$$

$$\Leftrightarrow\frac{r}{R}=\frac{2\sin A.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{4\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$=4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}. \qquad (3)$$

Sử dụng kết quả trong ví dụ 1 - bài toán 1, ta có:

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

do đó (3) được chuyển thành:

$$1+\frac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C,\ \text{đpcm.}$$

3. Tồn tại những đẳng thức có thể được chứng minh bằng phương pháp biến đổi lượng giác và bằng phương pháp hình học, để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 15: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$(b-c).\mathrm{cotg}\frac{A}{2}+(c-a).\mathrm{cotg}\frac{B}{2}+(a-b).\mathrm{cotg}\frac{C}{2}=0. \qquad (1)$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng các phép biến đổi lượng giác, ta có:

$$(b-c).\text{cotg}\frac{A}{2}=2R(\sin B-\sin C).\text{cotg}\frac{A}{2}$$

$$=4R.\cos\frac{B+C}{2}.\sin\frac{B-C}{2}.\text{cotg}\frac{A}{2}$$

$$=4R.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B-C}{2}.\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=4R.\sin\frac{B-C}{2}.\sin\frac{B+C}{2}$$

$$=2R(\cos C-\cos B).$$

tương tự:

$$(c-a).\text{cotg}\frac{B}{2}=2R(\cos A-\cos C).$$

$$+(a-b).\text{cotg}\frac{C}{2}=2R(\cos B-\cos A).$$

Cộng theo vế ta nhận được đẳng thức cần chứng minh.

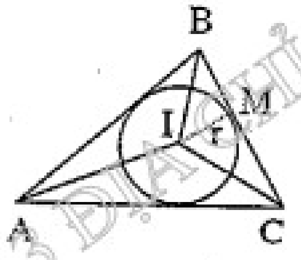
Cách 2: Sử dụng các phương pháp hình học, ta có:

$$a=BC=BM+MC=r.\text{cotg}\frac{B}{2}+r.\text{cotg}\frac{C}{2}=r(\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}). \quad (2)$$

tương tự:

$$b=r(\text{cotg}\frac{C}{2}+\text{cotg}\frac{A}{2}), \quad (3)$$

$$c=r(\text{cotg}\frac{A}{2}+\text{cotg}\frac{B}{2}). \quad (4)$$



Thay (2), (3), (4) vào VT của (1), ta được điều cần chứng minh.

Chú ý: Qua cách trình bày của ví dụ trên các em học sinh cần rút ra cho bản thân kinh nghiệm khi thực hiện phép biến đổi hoặc tính toán các biểu thức chứa các nhân tử có tính chất tương tự. Tuy nhiên điều này không phải bao giờ cũng đúng, để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 16: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$(a+b)\cos C+(b+c)\cos A+(c+a)\cos B=a+b+c.$$

Giải

Ta có:

$$VT=(a+b)\cos C+(b+c)\cos A+(c+a)\cos B$$

$$=2R(\sin A+\sin B)\cos C+(\sin B+\sin C)\cos A+(\sin C+\sin A)\cos B$$

$$=2R[(\sin A.\cos C+\sin C.\cos A)+(\sin B.\cos C+\sin C.\cos B)+$$

$$+(\sin C.\cos A+\sin A.\cos C)$$

$$=2R[\sin(A+C)+\sin(B+C)+\sin(C+A)]$$

$$=2R(\sin A+\sin B+\sin C)=a+b+c.$$

Chú ý: Với các đẳng thức lượng giác có liên quan tới vị trí của điểm, chúng ta cần xác định được các trường hợp xảy ra, rồi thực hiện cho mỗi trường hợp riêng. Để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 17: Cho ΔABC, có các góc B, C nhọn. Gọi M là trung điểm BC. CMR:

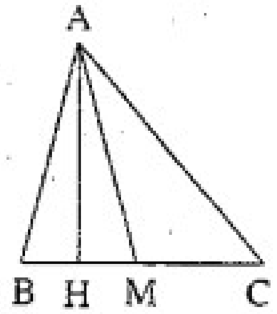
$$\text{cotg}\,\widehat{AMB}=\frac{\sin(B-C)}{2\sin B.\sin C}.$$

Giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC, khi đó H có thể thuộc BM hoặc MC, do đó ta sẽ xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu H thuộc BM.

Ta có:



$$\text{cotg}\,\widehat{AMB}=\frac{MH}{AH}=\frac{2MH}{2AH}=\frac{(MH+MC)-(MB-HM)}{2AH}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{HC}{AH}-\frac{BH}{AH})=\frac{1}{2}(\text{cotg}C-\text{cotg}B)$$

$$=\frac{\sin(B-C)}{2\sin B.\sin C}.$$

Trường hợp 2: Nếu H thuộc MC - *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Chú ý: Thông qua các ví dụ trên hẳn các em học sinh đã có được suy luận lôgic khi đánh giá đẳng thức cần chứng minh, để từ đó lựa chọn phương pháp thực hiện cùng với các công thức lượng giác sẽ sử dụng. Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ thêm việc đánh giá đẳng thức.

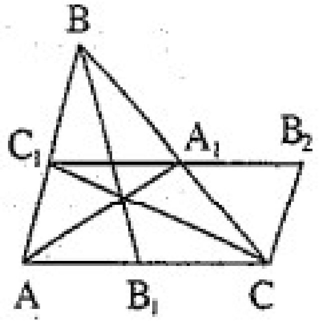
Ví dụ 18: Cho ΔABC. CMR:

$$S=\frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}, \quad (1)$$

với $m=\frac{1}{2}(m_a+m_b+m_c)$. (*)

Giải

Nhận xét rằng với (*) thì biểu thức $\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$ chính là công thức Hêrông cho tam giác có các cạnh là m_a, m_b, m_c, do vậy chúng ta sẽ chứng minh (1) theo hai bước:



Bước 1: Dựng tam giác có các cạnh là m_a, m_b, m_c và diện tích S_1.

Bước 2: Chứng minh $S=\frac{4}{3}S_1$.

Như vậy:

Với A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB, ta dựng hình bình hành $ACKB_2$, từ đó suy ra ΔBB_1B_2 có các cạnh là:

$$BB_1=m_b,\ B_1B_2=AA_1=m_a,\ B_2B=CC_1=m_c.$$

DIỄN ĐÀN TOÁN - LÍ - HOÁ CẤP 2-3 ĐỊA CHỈ: 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

Ta có:

$$S=\frac{4}{3}S_{\Delta BB_1B_2}$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}.$$

III. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$(b-c)\text{cotg}\frac{A}{2}+(c-a)\text{cotg}\frac{B}{2}+(a-b)\text{cotg}\frac{C}{2}=0.$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$$(b-c)\text{cotg}\frac{A}{2}=2R(\sin B-\sin C)\text{cotg}\frac{A}{2}=4R\cos\frac{B+C}{2}.\sin\frac{B-C}{2}.\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$=4R.\sin\frac{B-C}{2}.\sin\frac{B+C}{2}=2R(\cos C-\cos B). \qquad (1)$$

Tương tự ta có:

$$(c-a)\text{cotg}\frac{B}{2}=2R(\cos A-\cos C). \qquad (2)$$

$$(a-b)\text{cotg}\frac{C}{2}=2R(\cos B-\cos A). \qquad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta được điều cần chứng minh.

Bài 2: Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{\text{tg}A}{\text{tg}B}=\frac{c^2+a^2-b^2}{c^2+b^2-a^2}.$$

BÀI GIẢI

Áp dụng định lý hàm số cosin và hàm số sin, ta có:

$$\frac{\text{tg}A}{\text{tg}B}=\frac{\sin A.\cos B}{\cos A.\sin B}=\frac{\frac{a}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}}{\frac{b}{2R}\cdot\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}}=\frac{c^2+a^2-b^2}{c^2+b^2-a^2}.$$

Bài 3: Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$S=\frac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A).$$

BÀI GIẢI

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng các phép biến đổi lượng giác, ta có:

$$S=\frac{1}{2}ab.\sin C=\frac{1}{2}(2R.\sin A)(2R.\sin B).\sin C=2R^2.\sin A.\sin B.\sin(A+B)$$

$$=2R^2.\sin A.\sin B.(\sin A.\cos B+\sin B.\cos A)$$

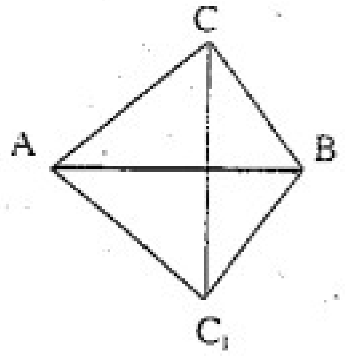
$$=2R^2.(\sin^2 A.\sin B.\cos B+\sin^2 B.\sin A.\cos A)$$

$$=2R^2.\left[\left(\frac{a}{2R}\right)^2.\frac{1}{2}\sin 2B+\left(\frac{b}{2R}\right)^2.\frac{1}{2}\sin 2A\right]$$

$$=\frac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A).$$

Cách 2: Sử dụng các phương pháp hình học:

Gọi C_1 là điểm đối xứng với C qua AB. ta được:



$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}S_{ACBC_1}$$

$$=\frac{1}{2}(S_{\Delta ACC_1}+S_{\Delta BCC_1})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}b^2.\sin 2A+a^2.\sin 2B)$$

$$=\frac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A).$$

Bài 4: Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$a^4=b^4+c^4 \Leftrightarrow 2\sin^2 A=\text{tg}B.\text{tg}C.$$

BÀI GIẢI

Sử dụng các công thức:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A,$$

$$\text{cotg}B=\frac{a^2+c^2-b^2}{4S},$$

$$\text{cotg}C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}.$$

Ta có:

$$2\sin^2 A=\text{tg}B.\text{tg}C \Leftrightarrow 2\left(\frac{2S}{bc}\right)^2=\frac{1}{\cot gB}.\frac{1}{\cot gC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8S^2}{b^2c^2}=\frac{4S}{a^2+c^2-b^2}.\frac{4S}{a^2+b^2-c^2}$$

$$\Leftrightarrow a^4-(b^2-c^2)^2=2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow a^4=b^4+c^4.$$

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: *Cho ΔABC, chứng minh rằng:*

a. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$.

b. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A.\sin B.\sin C$.

c. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A.\cos B.\cos C$.

Bài tập 2: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $\text{cotg}A.\text{cotg}B+\text{cotg}B.\text{cotg}C+\text{cotg}C.\text{cotg}A=1$.

b. $\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}.\text{tg}\frac{A}{2}=1$.

c. $\text{cotg}\frac{A}{2}+\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}=\text{cotg}\frac{A}{2}.\text{cotg}\frac{B}{2}.\text{cotg}\frac{C}{2}$.

Bài tập 3: Cho ΔABC với n nguyên dương, chứng minh rằng:

a. $\sin(2nA)+\sin(2nB)+\sin(2nC)=4(-1)^{n+1}\sin(nA).\sin(nB).\sin(nC)$.

b. $\cos(2nA)+\cos(2nB)+\cos(2nC)=4(-1)^{n+1}\cos(nA).\cos(nB).\cos(nC)-1$.

c. $\cos^2 nA+\cos^2 nB+\cos^2 nC=2(-1)^n\cos(nA).\cos(nB).\cos(nC)+1$.

Bài tập 4: Cho ΔABC với n nguyên dương, chứng minh rằng:

a. $\text{tg}(nA)+\text{tg}(nB)+\text{tg}(nC)=\text{tg}(nA).\text{tg}(nB).\text{tg}(nC)$.

b. $\text{cotg}(nA).\text{cotg}(nB)+\text{cotg}(nB).\text{cotg}(nC)+\text{cotg}(nC).\text{cotg}(nA)=1$.

Bài tập 5: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $\frac{b+c}{a}.\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B-C}{2}$.

b. $\frac{2(b+c)}{a}.\sin^2\frac{A}{2}=\cos B+\cos C$.

Bài tập 6: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $(a^2-b^2)\sin A.\sin B=ab.\sin(A-B).\sin C$.

b. $\frac{a.\sin A+b.\sin B+c.\sin C}{a.\cos A+b.\cos B+c.\cos C}=\text{cotg}A+\text{cotg}B+\text{cotg}C$.

Bài tập 7: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $p(p-a)=bc.\cos^2\frac{A}{2}$.

b. $(p-b)(p-c)=bc.\sin^2\frac{A}{2}$.

Bài tập 8: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $a.\sin(B-C)+b.\sin(C-A)+c.\sin(A-B)=0$.

b. $(b^2-c^2)\text{cotg}A+(c^2-a^2)\text{cotg}B+(a^2-b^2)\text{cotg}C=0$.

Bài tập 9: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $S=\frac{R}{2}(a.\cos A+b.\cos B+c.\cos C)$.

b. $S=\frac{1}{4}(a^2.\text{cotg}A+b^2.\text{cotg}B+c^2.\text{cotg}C)$.

c. $S=\frac{a^2+b^2+c^2}{4(\cot gA+\cot gB+\cot gC)}$.

d. $S=(p-a)(p-b).\text{cotg}\frac{C}{2}$.

Bài tập 10: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $l_a=\frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$.

b. $(b+c)^2.l_a^2=bc[b+c]^2-a^2$.

c. $(b+c)^2+(4h_a^2+a^2)=2(l_a^2+a^2)(b+c)^2$.

d. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).l_c+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).l_a+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right).l_b=2(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2})$.

Bài tập 11: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$.

b. $b^2\sin 2C+c^2\sin 2C=2bc\sin(B+C)$

Bài tập 12: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $\text{cotg}A+\text{cotg}B+\text{cotg}C=\frac{(a^2+b^2+c^2)R}{abc}$.

b. $(a-b)\text{cotg}\frac{C}{2}+(b-c)\text{cotg}\frac{A}{2}+(a-c)\text{cotg}\frac{B}{2}=0$.

Bài tập 13: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $p=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

b. $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

c. $\frac{r}{p}=\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2}$.

d. $r=\frac{a.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$.

Bài tập 14: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $1+\frac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C$

b. $c^2=(a-b)^2+4S.\frac{1-\cos C}{\sin C}$

Bài tập 15: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$.

b. $S=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$.

c. $S=p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

Bài tập 16: Cho ΔABC có trung tuyến $AM=\frac{c}{2}$. Chứng minh rằng:

a. $a^2-c^2=2b^2$

b. $\sin^2A=2\sin^2B+\sin^2C$

Bài tập 17: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. Nếu $a+c=2b$ thì $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$

b. Nếu $a+c=2b$ thì $2(c-a)=3r(\operatorname{tg}\frac{C}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2})$

c. (ĐHTM - 2000): Nếu $a^2+c^2=2b^2$ thì

$$2\operatorname{cotg}B=\operatorname{cotg}C+\operatorname{cotg}A$$

Bài tập 18: Cho ΔABC, có các cạnh thoả mãn $a^4=b^4+c^4$. CMR ΔABC nhọn và các góc thoả mãn:

$$2\sin^2A=\operatorname{tg}B.\operatorname{tg}C.$$

Bài tập 19: Cho ΔABC, AD là phân giác trong của góc A; D_1 là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AB. Chứng minh rằng:

$$AD_1=\frac{2p(p-a)}{b+c}$$

Bài tập 20: Đường tròn nội tiếp ΔABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại các điểm A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng:

$$S_{A_1B_1C_1}=\frac{pr^2}{2R}.$$

Bài tập 21: Cho ΔABC nhọn có các đường cao AA', BB', CC' và 3 cạnh BC=a, CA=b, AB=c.

a. Chứng minh rằng chu vi $\Delta A'B'C'$ bằng $a\cos A+b\cos B+c\cos C$

b. Chứng minh rằng $R_{A'B'C'}=\frac{1}{2}R_{ABC}$

Bài tập 22: Cho ΔABC nhọn. AA_1 là đường cao xuất phát từ A, H là trực tâm và G là trọng tâm. CMR:

a. $\operatorname{tg}B.\operatorname{tg}C=\frac{AA_1}{HA_1}$.

b. $HG//BC \Leftrightarrow \operatorname{tg}B.\operatorname{tg}C=3$

Bài tập 23: Cho ΔABC, đường tròn nội tiếp có tâm I, bán kính r. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, IBC, ICA, IBA có bán kính lần lượt là R, R_1, R_2, R_3. Chứng minh rằng:

$$R_1R_2R_3=2R^2.r.$$

Bài tập 24: Cho ΔABC, M là điểm bất kỳ trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên các cạnh BC, CA, AB. CMR:

$$\operatorname{cotg}\widehat{AA_1B}+\operatorname{cotg}\widehat{BB_1C}+\operatorname{cotg}\widehat{CC_1A}=0.$$

CHỦ ĐỀ 2

BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Chứng minh bất đẳng thức lượng giác trong tam giác

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh một bất đẳng thức lượng giác trong tam giác, ta có thể lựa chọn theo thứ tự các phương pháp sau:

Phương pháp 1: Dùng phép biến đổi tương đương.

Phương pháp 2: Dùng các bất đẳng thức cơ bản đã có sẵn, như:

1. Bất đẳng thức Côsi:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i \ge \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i} \quad \text{với } a_i\ge 0,\ \forall i=\overline{1,n}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

2. Bất đẳng thức Bunhiacốpski:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$.

3. Bất đẳng thức Jensen (bất đẳng thức hàm lồi) được phát biểu dưới dạng:

- Nếu $f''(x)<0,\ \forall x\in(a, b)\ \&\ a_i\in(a, b),\ \forall\ i=\overline{1,n}$ thì:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\ge\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a_i) \quad \text{với}$$

- Nếu $f''(x)>0,\ \forall x\in(a, b)\ \&\ a_i\in(a, b),\ \forall\ i=\overline{1,n}$ thì:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a_i) \quad \text{với}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Phương pháp 3: Dùng tam thức bậc hai.

Phương pháp 4: Dùng phương pháp hàm số.

Chú ý: Khi chứng minh một bất đẳng thức lượng giác trong tam giác cần chú ý tới các tính chất đặc trưng của các hàm lượng giác, như:

1. Tính bị chặn của hàm sinx, cosx.
2. Dấu các hàm lượng giác trong các cung phần tư.

3. Tính chất của các cung liên kết: cung đối, cung bù, cung phụ, cung sai khác π.

4. *Tính chất: |b-c|<a<b+c trong ΔABC.*

5. *Đặc biệt lưu ý tới các đẳng thức và bất đẳng thức cơ bản trong tam giác, như:*

a. ***Các đẳng thức***

- $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$.
- $\cos A+\cos B+\cos C=4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$.
- $\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C=\mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C$.
- $\mathrm{cotg}A.\mathrm{cotg}B+\mathrm{cotg}B.\mathrm{cotg}C+\mathrm{cotg}C.\mathrm{cotg}A=1$.
- $\mathrm{tg}\frac{A}{2}.\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}.\mathrm{tg}\frac{C}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}.\mathrm{tg}\frac{A}{2}=1$.
- $\mathrm{cotg}\frac{A}{2}+\mathrm{cotg}\frac{B}{2}+\mathrm{cotg}\frac{C}{2}=\mathrm{cotg}\frac{A}{2}.\mathrm{cotg}\frac{B}{2}.\mathrm{cotg}\frac{C}{2}$.

b. **Các bất đẳng thức**

- $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
- $1<\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$.
- $1<\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$.
- $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
- $\sin A.\sin B.\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$.
- $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$.
- $\cos A.\cos B.\cos C\le\frac{1}{8}$.
- $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\le\frac{9}{4}$.
- $\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C\ge3\sqrt{3}$.
- với ΔABC nhọn.
- $\mathrm{cotg}A+\mathrm{cotg}B+\mathrm{cotg}C\ge\sqrt{3}$.
- $\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$.
- $\mathrm{cotg}\frac{A}{2}+\mathrm{cotg}\frac{B}{2}+\mathrm{cotg}\frac{C}{2}\ge3\sqrt{3}$.

II.CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

Trong phần này chúng ta sẽ chỉ quan tâm tới các bất đẳng thức cơ bản.

Bất đẳng thức 1: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Chứng minh

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng phép biến đổi.

Ta có:

$$\sin A+\sin B+\sin C+\sin\frac{\pi}{3}=2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}+2\sin(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}).\cos(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6})$$

$$\overset{0<\frac{A+B}{2},\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}<\pi}{\le}\quad 2\sin\frac{A+B}{2}+2\sin(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6})$$

$$=4\sin(\frac{A+B+C}{4}+\frac{\pi}{12}).\cos(\frac{A+B-C}{4}-\frac{\pi}{12})$$

$$=4\sin\frac{\pi}{3}.\cos(\frac{A+B-C}{4}-\frac{\pi}{12})\le4\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow\sin A+\sin B+\sin C\le3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\cos\frac{A-B}{2}=1\\ \cos(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6})=1\\ \cos(\frac{A+B-C}{4}-\frac{\pi}{12})=1\end{cases}\Leftrightarrow A=B=C\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Cách 2: Sử dụng tính chất hàm lồi.

Xét hàm số f(x)=sinx với x∈(0, π).

Đạo hàm:

$f'(x)=\cos x$,

$f''(x)=-\sin x\le0\ \forall x\in(0,\pi)$

Vậy hàm số f(x)=sinx là lồi trên (0, π), do đó: với ∀A, B, C∈(0, π) ta có:

$$\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}\le f(\frac{A+B+C}{3})\Leftrightarrow\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\le\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A=B=C ⇔ ΔABC đều.

Bất đẳng thức 2: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$1<\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}.$$

Chứng minh

a. Chứng minh vế trái, ta có:

$$\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}+\cos C$$

$$=2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}=1+2(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}).\sin\frac{C}{2}$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}>1.$$

Nhận xét: Nếu cho A→ 0, thì:

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\to1$$

do vậy không thể thay số 1 bởi số lớn hơn trong bất đẳng thức trên.

b. Chứng minh vế phải, ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng kết quả $xy\le\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, ta nhận được:

$$VT=\cos A+\cos B-\cos(A+B)=(\cos A+\cos B).1-\cos A.\cos B+\sin A.\sin B$$
$$\le\frac{1}{2}[(\cos A+\cos B)^2+1]-\cos A.\cos B+\frac{1}{2}(\sin^2A+\sin^2B)=\frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\cos A+\cos B=1\\ \sin A=\sin B\end{cases}\Leftrightarrow A=B=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Cách 2: Sử dụng $a.\sin x+b.\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$.

$$VT=\cos A+\cos B-\cos(A+B)=\cos A+\cos B-\cos A.\cos B+\sin A.\sin B$$
$$=[(1-\cos B)\cos A+\sin B.\sin A]+\cos B$$
$$\le\sqrt{(1-\cos B)^2+\sin^2B}+\cos B=\sqrt{2-2\cos B}+\cos B$$
$$=2\sin\frac{B}{2}+1-2\sin^2\frac{B}{2}=\frac{3}{2}-2(\frac{1}{2}-\sin\frac{B}{2})^2\le\frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}(1-\cos B)\cos A+\sin B.\sin A=2\sin\frac{B}{2}\\ \sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=\frac{\pi}{3}\\ \frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A=2.\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Cách 3: Sử dụng phép biến đổi.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử C là góc nhỏ nhất trong ΔABC, suy ra $0<C<\frac{\pi}{3}$, khi đó:

$$\cos A+\cos B+\cos C+\cos\frac{\pi}{3}=2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}+2\cos(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}).\cos(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6})$$
$$\le2\cos\frac{A+B}{2}+2\cos(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6})=4\cos(\frac{A+B+C}{4}+\frac{\pi}{12}).\cos(\frac{A+B-C}{4}-\frac{\pi}{12})$$
$$=4\cos\frac{\pi}{3}.\cos(\frac{A+B-C}{4}-\frac{\pi}{12})\le4\cos\frac{\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow\cos A+\cos B+\cos C\le3\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\cos\frac{A-B}{2}=1\\ \cos(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6})=1\\ \cos(\frac{A+B-C}{4}-\frac{\pi}{12})=1\end{cases}\Leftrightarrow A=B=C\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Cách 4: Sử dụng tính chất hàm lồi.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử C là góc nhỏ nhất trong ΔABC, suy ra $0<C<\frac{\pi}{3}$, khi đó:

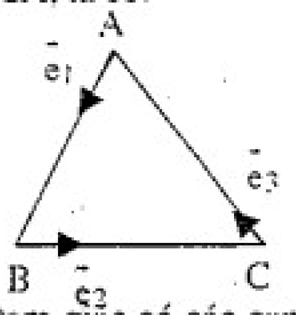
$$\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}+\cos C$$
$$\le2\cos\frac{A+B}{2}+\cos C=\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}+\cos C$$
$$\overset{\text{Bđt hàm lồi}}{\le}3.\cos\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{A+B}{2}+C}{3}$$
$$=3\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\cos\frac{A-B}{2}=1\\ \frac{A+B}{2}=C\end{cases}\Leftrightarrow A=B \ \& \ C=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Cách 5: Sử dụng phép vectơ.

Lấy ba vectơ đơn vị $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ trên ba cạnh AB, BC, CA, ta có:



$$(\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3)^2\ge0$$
$$\Leftrightarrow1+1+1+2(\bar{e}_1.\bar{e}_2+\bar{e}_2.\bar{e}_3+\bar{e}_3.\bar{e}_1)\ge0$$
$$\Leftrightarrow3+2(-\cos B-\cos C-\cos A)\ge0$$
$$\Leftrightarrow\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đồng dạng với tam giác có các cạnh là các vectơ đơn vị ⇔ ΔABC đều.

Chú ý: Bất đẳng thức này được sử dụng để chứng minh:

1. $(1+a+b-ab)\cos C+(1+b+c-bc)\cos A+(1+c+a-ca)\cos B\le3$.
2. Cho ΔABC, các phân giác AA_1, BB_1 và CC_1 theo thứ tự cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_2, B_2, C_2. CMR:
$$\frac{AA_1}{AA_2}+\frac{BB_1}{BB_2}+\frac{CC_1}{CC_2}\le\frac{9}{4}.$$
3. Cho ΔABC nhọn, nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi R_1, R_2, R_3 theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp các ΔOBC, ΔOCA, ΔOAB. Chứng minh rằng:
$$R_1+R_2+R_3\ge3R.$$

Bất đẳng thức 3: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$1<\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}.$$

Chứng minh

a. Chứng minh vế trái, ta có:

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\overset{0<\cos\frac{A}{2},\cos\frac{B}{2}<1}{\ge}\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}$$

$$=\sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}$$

$$=\sqrt{2}\sin(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{4})\overset{\frac{\pi}{4}<\frac{C}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}}{>}\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=1.$$

b. Chứng minh vế phải, ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng kết quả $xy\le\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, ta nhận được:

$$VT=\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}$$

$$=(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}).1+\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}$$

$$\le\frac{1}{2}[(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2})^2+1]+\frac{1}{2}(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2})-\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}=\frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}=1\\ \cos\frac{A}{2}=\cos\frac{B}{2}\end{cases}\Leftrightarrow A=B=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\Delta ABC\text{ đều.}$$

Cách 2: Sử dụng tính chất hàm lồi.

Xét hàm số $f(x)=\sin x$ với $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

Đạo hàm:

$f'(x)=\cos x$,

$f''(x)=-\sin x\le0\ \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$

Vậy hàm số $f(x)=\sin x$ là lồi trên $(0,\frac{\pi}{2})$, do đó: với $\forall\ \frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$ ta có:

$$\frac{f(\frac{A}{2})+f(\frac{B}{2})+f(\frac{C}{2})}{3}\le f(\frac{A+B+C}{6})\Leftrightarrow\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3}\le\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều.

Chú ý: Bất đẳng thức này được sử dụng để chứng minh:

1. Cho ΔABC, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Kéo dài AI, BI, CI theo thứ tự cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_2, B_2, C_2. CMR:

   $$IA_2+IB_2+IC_1\ge IA+IB+IC.$$

2. Cho ΔABC nhọn, nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi R_1, R_2, R_3 theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp các ΔOBC, ΔOCA, ΔOAB. Chứng minh rằng:

   $$R_1+R_2+R_3\ge3R.$$

Bất đẳng thức 4: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$2<\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Chứng minh

a. Chứng minh vế trái, ta có $,<\cos\frac{A}{2},\cos\frac{B}{2},\cos\frac{C}{2}<1$ nên:

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}>\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos A+1+\cos B+1+\cos C)=\frac{1}{2}(3+\cos A+\cos B+\cos C)>\frac{4}{2}=2$$

Nhận xét: Nếu cho $A\to0$ & $B\to0$ thì $C\to\pi$, thì:

$$\cos\frac{A}{2}\to1,\ \cos\frac{B}{2}\to1\ \&\ \cos\frac{C}{2}\to0$$

$$\Rightarrow\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\to2$$

do vậy không thể thay số 2 bởi số lớn hơn trong bất đẳng thức trên.

b. Chứng minh vế phải, ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng kết quả $xy\le\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, ta nhận được:

$$VT=\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A+B}{2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos\frac{A}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos\frac{B}{2})+$$

$$+\sqrt{3}[\sin\frac{A}{2}.(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{B}{2})+\sin\frac{B}{2}.(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{A}{2})]$$

$$\le\frac{2}{\sqrt{3}}[\frac{1}{2}(\frac{3}{4}+\cos^2\frac{A}{2})+\frac{1}{2}(\frac{3}{4}+\cos^2\frac{B}{2})]+$$

$$+\sqrt{3}[\frac{1}{2}(\sin^2\frac{A}{2}+\frac{1}{3}\cos^2\frac{B}{2})+\frac{1}{2}(\sin^2\frac{B}{2}+\frac{1}{3}\cos^2\frac{A}{2})]$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\frac{A}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{B}{2} \\ \sin\frac{B}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{A}{2} \end{cases} \Leftrightarrow A=B=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Cách 2: Sử dụng tính chất hàm lồi.

Xét hàm số $f(x)=\cos x$ với $x\in(0, \frac{\pi}{2})$.

Đạo hàm:

$f'(x)=-\sin x$,

$f''(x)=-\cos x\le 0\ \forall x\in(0, \frac{\pi}{2})$

Vậy hàm số $f(x)=\cos x$ là lồi trên $(0, \frac{\pi}{2})$, do đó: với $\forall \frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}\in(0, \frac{\pi}{2})$ ta có:

$$\frac{f(\frac{A}{2})+f(\frac{B}{2})+f(\frac{C}{2})}{3}\le f(\frac{A+B+C}{6}) \Leftrightarrow \frac{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}{3}\le\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Chú ý: Bất đẳng thức này được sử dụng để chứng minh:

1. $\frac{l_a+l_b}{c}+\frac{l_b+l_c}{a}+\frac{l_c+l_a}{b}\le 3\sqrt{3}$.

Bất đẳng thức 5: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\sin A.\sin B.\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Chứng minh

Vì $\sin A, \sin B, \sin C>0$, nên sử dụng bất đẳng thức Côsi ta được:

$$\sin A.\sin B.\sin C\le\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^3\le\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Chú ý: Bất đẳng thức này được sử dụng để chứng minh:

1. $\frac{r}{R}\le\frac{1}{2}$.
2. $(1+\frac{1}{\sin A})(1+\frac{1}{\sin B})(1+\frac{1}{\sin C})\ge(1+\frac{2}{\sqrt{3}})^3$.

Bất đẳng thức 6: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}.$$

Chứng minh

Vì $\sin\frac{A}{2}, \sin\frac{B}{2}, \sin\frac{C}{2}>0$, nên sử dụng bất đẳng thức Côsi ta được:

$$\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\le\left(\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3}\right)^3\le\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bất đẳng thức 7: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\cos A.\cos B.\cos C\le\frac{1}{8}.$$

Chứng minh

Nếu ΔABC tù, thì $\cos A.\cos B.\cos C<0$, do đó bất đẳng thức luôn đúng.

Nếu ΔABC vuông hoặc nhọn, thì $\cos A, \cos B, \cos C\ge 0$, nên sử dụng bất ẳng thức Côsi ta được:

$$\cos A.\cos B.\cos C\le\left(\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3\le\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

ất đẳng thức 8: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

hứng minh

Vì $\cos\frac{A}{2}, \cos\frac{B}{2}, \cos\frac{C}{2}>0$, nên sử dụng bất đẳng thức Côsi ta được:

$$\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}\le\left(\frac{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}{3}\right)^3\le\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bất đẳng thức 9: *Cho ΔABC, chứng minh rằng:*

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\le\frac{9}{4}.$$

Chứng minh

Thực hiện phép biến đổi tương đương:

$$4(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)\le 9$$
$$\Leftrightarrow 4\sin^2A+2(1-\cos 2B)+2(1-\cos 2C)\le 9$$
$$\Leftrightarrow 4\sin^2A-4\cos(B+C).\cos(B-C)\le 5$$
$$\Leftrightarrow 4(1-\cos^2A)+4\cos A.\cos(B-C)\le 5$$
$$\Leftrightarrow 4\cos^2A-4\cos A.\cos(B-C)+1\ge 0$$
$$\Leftrightarrow [2\cos A-\cos(B-C)]^2+1-\cos^2(B-C)\ge 0, \text{ luôn đúng}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}2\cos A=\cos(B-C)\\ \cos^2(B-C)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\cos A=\cos(B-C)\\ \sin(B-C)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\cos A=1\\ B=C\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Chú ý: Bất đẳng thức này được sử dụng để chứng minh:

1. $m_a+m_b+m_c\le\frac{9R}{2}$.
2. $m_a.m_b.m_c\le\frac{27R^3}{8}$.
3. $\frac{1}{(m_a+m_b-m_c)^2}+\frac{1}{(m_a-m_b+m_c)^2}+\frac{1}{(m_a-m_b-m_c)^2}\ge\frac{4}{3R^2}$.

Bất đẳng thức 10: Cho ΔABC nhọn, chứng minh rằng:

$$tgA+tgB+tgC\ge 3\sqrt{3}. \qquad (1)$$

Chứng minh

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Trước hết ta có:

- $tgA+tgB+tgC=tgA.tgB.tgC$,

Vì ΔABC nhọn nên tgA, tgB, tgC>0, do đó áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$tgA+tgB+tgC\ge 3\sqrt[3]{tgA.tgB.tgC}=3\sqrt[3]{tgA+tgB+tgC}$$
$$\Leftrightarrow (tgA+tgB+tgC)^3\ge 27(tgA+tgB+tgC)$$
$$\Leftrightarrow (tgA+tgB+tgC)^2\ge 27\Leftrightarrow tgA+tgB+tgC\ge 3\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

ách 2: Sử dụng tính chất hàm lồi.

Xét hàm số f(x)=tgx với $x\in(0, \frac{\pi}{2})$.

Đạo hàm:

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2x},$$
$$f''(x)=-\frac{2\sin x}{\cos^3x}>0\ \forall x\in(0, \frac{\pi}{2})$$

Vậy hàm số f(x)=tgx là lõm trên $(0, \frac{\pi}{2})$, do đó: với ∀ A, B, $C\in(0, \frac{\pi}{2})$ ta có:

$$\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}\ge f(\frac{A+B+C}{3})\Leftrightarrow\frac{tgA+tgB+tgC}{3}\ge tg\frac{\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow tgA+tgB+tgC\ge 3\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Chú ý:

1. Vì tgA+tgB+tgC=tgA.tgB.tgC nên

$$tgA.tgB.tgC\ge 3\sqrt{3} \qquad (2)$$

o đó:

$$(tgA.tgB.tgC)_{Min}=3\sqrt{3}$$ - *Đề 10.*

2. Sử dụng (2) ta lại có:

$$tg^2A+tg^2B+tg^2C\ge 3\sqrt[3]{tg^2A.tg^2B.tg^2C}=9,$$

từ đó có thể tổng quát hoá

$$tg^nA+tg^nB+tg^nC\ge 3\sqrt[3]{(3\sqrt{3})^n}.$$

Đặc biệt với n=6, ta được:

$$tg^6A+tg^6B+tg^6C\ge 81$$ - *Đề thi ĐHTM - 96.*

3. Nếu đặt:

$$\begin{cases}tgA+tgB+tgC=tgA.tgB.tgC=-p\\ tgA.tgB+tgB.tgC+tgC.tgA=q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p\le -3\sqrt{3}\\ q\ge 9\end{cases}.$$

Khi đó tgA, tgB, tgC là nghiệm của phương trình:

$$t^3+pt^2+qt+p=0$$ - *Đề thi HSG PTTH Toàn quốc - 98.*

4. Chúng ta có thể sử dụng các kết quả trên để chứng minh được:

Với ΔABC nhọn, luôn có:

a. $(tgA)^{tgA}+(tgB)^{tgB}+(tgC)^{tgC}\ge(\sqrt{3})^{3\sqrt{3}}$.

b. $\frac{tg^5A+tg^5B+tg^5C}{tgA+tgB+tgC}\ge 9$.

c. $\frac{tg^6A+tg^6B+tg^6C}{tgA+tgB+tgC}\ge 9\sqrt{3}$.

Bất đẳng thức 11: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}.$$

Chứng minh

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Trước hết ta có:

- $\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}.\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}.\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1,$
- $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$, với mọi x, y, z.

Để nghị bạn đọc tự chứng min

Ta có:

$$(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2})^2\geq 3(\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}.\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}.\operatorname{tg}\frac{A}{2})=3$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Cách 2: Sử dụng tính chất hàm lồi.

Xét hàm số f(x)=tgx với $x\in(0, \frac{\pi}{2})$.

Đạo hàm:

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$f''(x)=-\frac{2\sin x}{\cos^3 x}>0\ \forall x\in(0, \frac{\pi}{2})$$

Vậy hàm số f(x)=tgx là lõm trên $(0, \frac{\pi}{2})$, do đó: với $\forall\ \frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}\in(0, \frac{\pi}{2}$ ta có:

$$\frac{f(\frac{A}{2})+f(\frac{B}{2})+f(\frac{C}{2})}{3}\geq f(\frac{A+B+C}{6})\Leftrightarrow\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{3}\geq\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A=B=C ⇔ ΔABC đều.

Chú ý: Bất đẳng thức này được sử dụng để chứng minh:

1. $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\geq 1.$

Từ đó có thể tổng quát:

$$\operatorname{tg}^{2n}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^{2n}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^{2n}\frac{C}{2}\geq\frac{1}{3^{n-1}}.$$

Thật vậy:

$$(\operatorname{tg}^2\frac{A}{2})^n+(\operatorname{tg}^2\frac{B}{2})^n+(\operatorname{tg}^2\frac{C}{2})^n\geq 3\left(\frac{\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}}{3}\right)^n\geq 3.\frac{1}{3^n}\ \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Đặc biệt với n=3, ta được:

$\operatorname{tg}^6\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^6\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^6\frac{C}{2}\geq\frac{1}{9}$ - *Đề thi ĐHGTVT - 96.*

2. $a^2+b^2+c^2\geq(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4S\sqrt{3}.$
3. $2(ab+bc+ca)\geq(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+8S\sqrt{3}.$

Bất đẳng thức 12: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2}.\operatorname{tg}\frac{C}{2}\leq\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Chứng minh

Ta có:

$$1=\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}.\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}.\operatorname{tg}\frac{A}{2}\geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2}.\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2}.\operatorname{tg}\frac{C}{2}\leq\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A=B=C ⇔ ΔABC đều.

Chú ý:

1. Bất đẳng thức này được sử dụng để chứng minh:

   Nếu ΔABC thoả mãn:

   $$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}.\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}.\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{26}{27}$$

   thì ΔABC đều.
2. Để nghị bạn đọc tự chứng minh các bất đẳng thức:
   - a. $\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C\geq\sqrt{3}.$
   - b. $\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}.$

III.CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

1. SỬ DỤNG CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Bài tập áp dụng 1: Cho ΔABC nhọn, chứng minh rằng:

a. $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C\geq\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}.$

b. $\sqrt{\operatorname{tg}A}+\sqrt{\operatorname{tg}B}+\sqrt{\operatorname{tg}C}\geq\sqrt{\cot g\frac{A}{2}}+\sqrt{\cot g\frac{B}{2}}+\sqrt{\cot g\frac{C}{2}}.$

Hướng dẫn

a. Ta có:

$$\text{tgA}+\text{tgB}=\frac{\sin(A+B)}{\cos A.\cos B}=\frac{\sin(A+B)}{\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]}$$

$$\geq\frac{2\sin(A+B)}{\cos(A+B)+1}\geq 2\text{tg}\frac{A+B}{2}=2\text{cotg}\frac{C}{2}.$$

Tương tự ta cũng có:

$$\text{tgB}+\text{tgC}\geq 2\text{cotg}\frac{A}{2},\ \text{tgC}+\text{tgA}\geq 2\text{cotg}\frac{B}{2}.$$

Suy ra:

$$\text{tgA}+\text{tgB}+\text{tgC}\geq\text{cotg}\frac{A}{2}+\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A=B=C $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

b. Sử dụng bất đẳng thức Côsi và $\text{tgA.tgB}\geq\text{cotg}^2\frac{C}{2}$, ta được:

$$\sqrt{\text{tgA}}+\sqrt{\text{tgB}}\geq 2\sqrt{\text{tgA.tgB}}\geq 2\text{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow(\sqrt{\text{tgA}}+\sqrt{\text{tgB}})^2\geq 4\text{cotg}\frac{C}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\text{tgA}}+\sqrt{\text{tgB}}\geq\sqrt{\text{cot g}\frac{C}{2}}.$$

Tương tự ta cũng có:

$$\sqrt{\text{tgB}}+\sqrt{\text{tgC}}\geq 2\sqrt{\text{cot g}\frac{A}{2}},\ \sqrt{\text{tgC}}+\sqrt{\text{tgA}}\geq 2\sqrt{\text{cot g}\frac{B}{2}}.$$

Suy ra:

$$\sqrt{\text{tgA}}+\sqrt{\text{tgB}}+\sqrt{\text{tgC}}\geq\sqrt{\text{cot g}\frac{A}{2}}+\sqrt{\text{cot g}\frac{B}{2}}+\sqrt{\text{cot g}\frac{C}{2}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A=B=C $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Bài tập áp dụng 2: Cho ΔABC, biết $0<A\leq B\leq C\leq\frac{\pi}{2}$, chứng minh rằng:

$$\frac{2\cos 3C-4\cos 2C+1}{\cos C}\geq 2. \qquad (1)$$

Hướng dẫn

Từ giả thiết suy ra $\frac{\pi}{6}\leq C<\frac{\pi}{2}$, do đó nếu đặt x=cosC thì $0<x\leq\frac{1}{2}$.

Khi đó (1) được viết lại dưới dạng:

$$\frac{2(4\cos^3 C-3\cos C)-4(2\cos^2 C-1)+1}{\cos C}\geq 2$$

$$\Leftrightarrow 8x^3-8x^2-8x+5\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(4x^2-2x-5)\geq 0 \text{ luôn đúng với } 0<x\leq\frac{1}{2}.$$

Bài tập áp dụng 3: CMR trong mọi ΔABC ta luôn có:

$$\text{tg}^2\frac{A}{2}+\text{tg}^2\frac{B}{2}+\text{tg}^2\frac{C}{2}\geq 1.$$

Hướng dẫn

Ta có:

$$\text{tg}^2\frac{A}{2}+\text{tg}^2\frac{B}{2}+\text{tg}^2\frac{C}{2}\geq\frac{1}{3}(\text{tg}\frac{A}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2})^2\geq\frac{1}{3}.(\sqrt{3})^2=1.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A=B=C $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Chú ý: Cũng có thể sử dụng bất đẳng thức hàm lõm để giải bài toán trên. cụ thể:

Xét hàm số $f(x)=x^2$.

Đạo hàm:

$$f'(x)=2x,\ f''(x)=2\geq 0\ \forall x$$

Vậy hàm số $f(x)=x^2$ là lõm ∀x. do đó với $\text{tg}\frac{A}{2},\text{tg}\frac{B}{2},\text{tg}\frac{C}{2}$ ta có:

$$\frac{f(\text{tg}(\frac{A}{2}))+f(\text{tg}(\frac{B}{2}))+f(\text{tg}(\frac{C}{2}))}{3}\geq f\left(\frac{\text{tg}(\frac{A}{2})+\text{tg}(\frac{B}{2})+\text{tg}(\frac{C}{2})}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\text{tg}^2(\frac{A}{2})+\text{tg}^2(\frac{B}{2})+\text{tg}^2(\frac{C}{2})}{3}\geq\left(\frac{\text{tg}(\frac{A}{2})+\text{tg}(\frac{B}{2})+\text{tg}(\frac{C}{2})}{3}\right)^2\geq\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\text{tg}^2\frac{A}{2}+\text{tg}^2\frac{B}{2}+\text{tg}^2\frac{C}{2}\geq 1.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A=B=C $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

2. SỬ DỤNG ĐẠI SỐ

Thông thường ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Dùng các bất đẳng thức đại số, như: Côsi, Bunhiacốpski, tam thức bậc hai, ... để chứng minh (trong bước này có thể đặt ẩn số phụ để đại số hoá bài toán lượng giác.).

Bước 2: Kết luận về tính đúng đắn của bất đẳng thức lượng giác.

Bài tập áp dụng 1: CMR trong mọi ΔABC ta luôn có:

$$S\leq\frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Hướng dẫn

Ta có:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)\overset{\text{Côsi}}{\leq}p.\left[\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right]^3=\frac{p^4}{27}$$

$$\Leftrightarrow S\leq\frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$p-a=p-b=p-c \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài tập áp dụng 2: CMR trong mọi ΔABC ta luôn có:

a. (ĐHKT TPHCM - 98): $\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{C}{2}}\ge 12$.

b. (ĐHYD TPHCM - 98): $\sqrt{p}\le\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\le\sqrt{3p}$.

c. (ĐHYD TPHCM - 99): $3S\le 2R^2(\sin^3A+\sin^3B+\sin^3C)$.

3. SỬ DỤNG HÌNH HỌC

Ta biết rằng các giá trị của tỉ số lượng giác có thể được định nghĩa bằng hình học, vì vậy vận dụng tính chất hình học ta có thể chứng minh một bất đẳng thức lượng giác.

Trong một tam giác, giá trị các hàm lượng giác của các góc liên quan đến các đại lượng hình học khác như: cạnh, chu vi, diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp, ...

a. Các hệ thức thường dùng trong tam giác gồm:

b. Định lý hàm số sin.

c. Định lý hàm số côsin.

d. Định lý hàm số tang

e. Các công thức tính diện tích.

Bài tập áp dụng 1: CMR trong mọi ΔABC ta luôn có:

a. (ĐHNN - 95): $\dfrac{2\sin A.\sin B.\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}\le\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

b. $\sin\dfrac{A}{2}\le\dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$.

4. SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Dùng đạo hàm kết hợp với khảo sát hàm số ta có thể chứng minh một bất đẳng thức lượng giác, đặc biệt là các bất đẳng thức chỉ chứa một biến số nhận giá trị trên một khoảng hay một đoạn.

Để chứng minh một bất đẳng thức A≥B bằng đạo hàm, ta thường thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt f(x)=A-B với x∈[a, b].
Bước 2: Xác định f'(x), thực hiện việc xét dấu f'(x) trên [a, b].
Bước 3: Khảo sát f(x) trên [a, b].
Bước 4: Chứng tỏ rằng f(x)≥0 với mọi x∈[a, b].
Bước 5: Suy ra A≥B.

Chú ý:

1. Nếu chưa xét dấu được f'(x) ta có thể tính tiếp f''(x), f'''(x),...
2. Ngoài ra còn có thể sử dụng bất đẳng thức hàm lồi.

5. SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN

Bất đẳng thức Jensen được phát biểu dưới dạng:

1. Nếu f''(x)<0, ∀x∈(a, b) & a_i∈(a, b), ∀ $i=\overline{1,n}$ thì:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\ge\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\ \text{với}$$

2. Nếu f''(x)>0, ∀x∈(a, b) & a_i∈(a, b), ∀ $i=\overline{1,n}$ thì:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\ \text{với}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=...=a_n$.

Để chứng minh một bất đẳng thức lượng giác bằng bất đẳng thức Jensen, ta thường thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt hàm số f(x) thích hợp với đề bài, với x∈[a, b].

Bước 2: Xác định f'(x), f''(x).

Bước 3: Khảo sát f(x) trên [a, b].

Bước 4: Chứng minh f''(x) không đổi dấu trên [a, b].

Bước 5: Áp dụng bất đẳng thức Jensen để suy ra điều cần chứng minh.

Bài tập áp dụng 1: CMR trong mọi ΔABC ta luôn có:

a. (ĐHNT TPHCM - 96): $\left(\text{tg}\dfrac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\text{tg}\dfrac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\text{tg}\dfrac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\ge 3^{1-\sqrt{2}}$

b. (ĐHGTVT - 96): $\text{tg}^6\dfrac{A}{2}+\text{tg}^6\dfrac{B}{2}+\text{tg}^6\dfrac{C}{2}\ge\dfrac{1}{9}$.

IV.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Trong phần này chúng ta sẽ sử dụng các bất đẳng thức cơ bản đã chứng minh trong phần II để thực hiện việc chứng minh các bất đẳng thức tam giác.

Bài 1: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. (Đề 116): $\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}<2$.

b. (ĐHTH HN - 93): $\dfrac{\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}}<2$.

BÀI GIẢI

a. Ta có:

$\cos A+\cos B>0 \Rightarrow (\cos A+\cos B).\sin C\le\cos A+\cos B.$ (1)

Tương tự ta cũng có:

$$(\cos B+\cos C).\sin A\le \cos B+\cos C. \qquad (2)$$

$$(\cos C+\cos A).\sin B\le \cos C+\cos A. \qquad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3) với lưu ý rằng dấu "=" không thể xảy ra đồng thời tại (1), (2), (3), ta được:

$$\sin(A+B)+\sin(B+C)+\sin(C+A)<2(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\Leftrightarrow \sin C+\sin A+\sin B<2(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}<2.$$

b. Tương tự.

Bài 2: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$(1+\frac{1}{\sin A})(1+\frac{1}{\sin B})(1+\frac{1}{\sin C})\ge(1+\frac{2}{\sqrt{3}})^3. \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$$VT=1+(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C})+(\frac{1}{\sin A.\sin B}+\frac{1}{\sin B.\sin C}+\frac{1}{\sin C.\sin A})$$

$$+\frac{1}{\sin A.\sin B.\sin C}$$

$$\overset{\text{Côsi}}{\ge} 1+\frac{3}{\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C}}+\frac{3}{(\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C})^2}+\frac{1}{(\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C})^3}$$

$$=(1+\frac{1}{\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C}})^3\ge(1+\frac{2}{\sqrt{3}})^3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

Chú ý: Bạn đọc cần nhớ rằng trong lời giải trên chúng ta đã sử dụng bất đẳng thức:

$$\sin A.\sin B.\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{8}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C}}\ge\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ sử dụng lại kết quả này.

Bài 3: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\frac{r}{R}\le\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$$S=pr=\frac{abc}{4R}$$

$$\Rightarrow r=\frac{abc}{4Rp}=\frac{abc}{4R(a+b+c)}=\frac{2R.\sin A.2R.\sin B.2R.\sin C}{4R(2R.\sin A+2R.\sin B+2R.\sin C)}$$

$$=\frac{2R.\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}\overset{\text{Côsi}}{\le}\frac{2R.\sin A.\sin B.\sin C}{3\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C}}$$

$$=\frac{2R.}{3}(\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C})^2\le\frac{2R.}{3}.\left(\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{8}}\right)^2=\frac{R.}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{r}{R}\le\frac{1}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

Bài 4: (*Bất đẳng thức Hadvigher*): Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2\ge(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4S\sqrt{3}. \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Biến đổi tương đương (1) về dạng:

$$2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\ge 4S\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2(\frac{2S}{\sin C}+\frac{2S}{\sin A}+\frac{2S}{\sin B})-4S(\text{cotg}A+\text{cotg}B+\text{cotg}C)\ge 4S\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow(\frac{1}{\sin A}-\text{cotg}A)+(\frac{1}{\sin B}-\text{cotg}B)+(\frac{1}{\sin C}-\text{cotg}C)\ge\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-\cos A}{\sin A}+\frac{1-\cos B}{\sin B}+\frac{1-\cos C}{\sin C}\ge\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}}+\frac{2\sin^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}}+\frac{2\sin^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}}\ge\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{A}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$$, luôn đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

Chú ý: Bạn đọc cần nhớ rằng trong lời giải trên chúng ta đã sử dụng các công thức biến đổi:

1. $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C\Rightarrow bc=\frac{2S}{\sin A}$, $ac=\frac{2S}{\sin B}$, $ab=\frac{2S}{\sin C}$.
2. Theo định lý hàm số cotg, ta có $\text{cotg}A+\text{cotg}B+\text{cotg}C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.
3. Bất đẳng thức cơ bản $\text{tg}\frac{A}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$.

Bài 5: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $m_a.m_b.m_c \le \frac{27R^3}{8}$.

b. $m_a+m_b+m_c \le \frac{9R}{2}$.

BÀI GIẢI

a. Ta có:

$$(m_a.m_b.m_c)^2 = m_a^2 . m_b^2 . m_c^2$$

$$\overset{\text{Côsi}}{\le} \left(\frac{m_a^2+m_b^2+m_b^2}{3}\right)^3 = \frac{1}{64}(a^2+b^2+c^2)^3$$

$$= \frac{1}{64}[(2R.\sin A)^2+(2R.\sin B)^2+(2R.\sin C)^2]^3$$

$$= R^6.(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)^3 \overset{\text{Cơ bản}}{\le} R^6.\left(\frac{9}{4}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow m_a.m_b.m_c \le \frac{27R^3}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

b. Ta có:

$$(m_a+m_b+m_c)^2 \overset{\text{Bunhiacoxpki}}{\le} (1+1+1)(m_a^2+m_b^2+m_c^2)$$

$$= \frac{9}{4}(a^2+b^2+c^2) = 9R^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)$$

$$\overset{\text{Cơ bản}}{\le} 9R^2.\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow m_a+m_b+m_c \le \frac{9R}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Chú ý: Bạn đọc cần nhớ rằng trong lời giải trên chúng ta đã sử dụng kết quả:

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C \le \frac{9}{4}.$$

Bài 6: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $l_a \le m_a$.

b. $\frac{l_a+l_b}{c}+\frac{l_b+l_c}{a}+\frac{l_c+l_a}{b} \le 3\sqrt{3}$.

BÀI GIẢI

a. Ta có:

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}.\sqrt{p(p-a)}$$

$$\overset{\text{Côsi}}{\le} \frac{b+c}{b+c}.\sqrt{p(p-a)} = \sqrt{p(p-a)}. \qquad (1)$$

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2) \ge \frac{1}{4}[(b+c)^2-a^2] = \frac{1}{4}(b+c+a)(b+c-a) = p(p-a)$$

$$\Rightarrow m_a \ge \sqrt{p(p-a)}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $l_a \le m_a$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

b. Viết lại VT của bất đẳng thức dưới dạng:

$$VT = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).l_c + \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).l_a + \left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)l_b$$

$$= \frac{a+b}{ab}.\frac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{a+b} + \frac{b+c}{bc}.\frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c} + \frac{c+a}{ca}.\frac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{a+c}$$

$$= 2\left(\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}\right) \le 2.\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Chú ý: Trong lời giải trên:

1. Với câu a) chúng ta đã sử dụng các kết quả:
   - $l_a = \frac{2bc}{b+c}.\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, được chứng minh trong chủ đề 1 - Định lý hàm số cosin trong tam giác.
   - $2b^2+2c^2 \ge (b+c)^2$, được chứng minh bằng phương pháp biến đổi tương đương.

   Việc sử dụng kết quả $l_a \le \sqrt{p(p-a)}$ ta nhận được:

   $$l_a+l_b+l_c \le \sqrt{p(p-a)}+\sqrt{p(p-b)}+\sqrt{p(p-c)} = \sqrt{p}\left(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\right)$$

   $$\overset{\text{Bunhiacoxpki}}{\le} \sqrt{p}\left(\sqrt{(1+1+1)[(p-a)+(p-b)+(p-c)]}\right) = p\sqrt{3}.$$

   Vậy $l_a+l_b+l_c \le p\sqrt{3}$ (đôi khi được viết $l_a+l_b+l_c \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$).
2. Với câu b) chúng ta đã sử dụng kết quả:

   $$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Bài 7: (ĐHSP II-98) CMR trong mọi tam giác ABC nhọn ta đều có:

$$\frac{2}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)+\frac{1}{3}(\text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C) > \pi.$$

BÀI GIẢI

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{3}\text{tg}x - x \text{ với } 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Đạo hàm:

$$f'(x) = \frac{2}{3}\cos x+\frac{1}{3}.\frac{1}{\cos^2x} - 1 = \frac{1}{3}\left(\cos x+\cos x+\frac{1}{\cos^2x}\right) - 1 \ge \frac{1}{3}.3-1 = 0,$$

$\Leftrightarrow$ hàm số f(x) đồng biến với $0<x<\frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow$ f(x)>f(0)

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{3}\text{tg}x-x>0 \text{ với } 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Vậy:

$$\frac{2}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)+\frac{1}{3}(\text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C)-(A+B+C)$$

$$=(\frac{2}{3}\sin A+\frac{1}{3}\text{tg}A-A)+(\frac{2}{3}\sin B+\frac{1}{3}\text{tg}B-B)+(\frac{2}{3}\sin C+\frac{1}{3}\text{tg}C-C)>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)+\frac{1}{3}(\text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C)>A+B+C$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)+\frac{1}{3}(\text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C)>\pi. \text{ (đpcm)}$$

V.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, có:

$$\text{cotg}A+\text{cotg}B+\text{cotg}C=\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$$

Chứng minh rằng:

$$\text{tg}A\geq\frac{8}{15}.$$

Bài tập 2: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $2(ab+bc+ca)\geq(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+8S\sqrt{3}$.

b. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\sqrt{\frac{3}{2rR}}$.

c. $\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{1}{r^2}$.

d. $\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\leq\frac{1}{4rR}$.

Bài tập 3: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $(1+a+b-ab)\cos C+(1+b+c-bc)\cos A+(1+c+a-ca)\cos B\leq3$.

Bài tập 4: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $h_a+h_b+h_c\geq9r$.

b. $h_a+h_b+h_c\geq\frac{1}{2}(8\sqrt[4]{3}.\sqrt{S}-3R)$.

c. $h_a+h_b+h_c\leq3(r+R)$.

d. $h_a+h_b+h_c\leq\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+18S}{a+b+c}$.

e. $\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}\geq2\sqrt{3}$.

f. $\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}\geq\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}$.

Bài tập 5: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $m_a.m_b.m_c\geq pS$.

b. $\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\geq2\sqrt{3}$.

c. $\frac{m_a\sqrt{3}-a}{\cot gA}+\frac{m_b\sqrt{3}-b}{\cot gB}+\frac{m_c\sqrt{3}-c}{\cot gC}\leq2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

d. $\frac{1}{(m_a+m_b-m_c)^2}+\frac{1}{(m_a-m_b+m_c)^2}+\frac{1}{(m_a-m_b-m_c)^2}\geq\frac{4}{3R^2}$.

e. $m_a+m_b+m_c\leq r+4R$.

f. $m_a+m_b+m_c\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}$.

g. $m_a.\cos\frac{A}{2}+m_b.\cos\frac{B}{2}+m_c.\cos\frac{C}{2}\geq\frac{3}{4}(a+b+c)$.

Bài tập 6: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $l_a+l_b+l_c\leq\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$.

b. $\frac{ab}{l_c}+\frac{bc}{l_a}+\frac{ca}{l_b}\leq6R$.

Bài tập 7: Cho ΔABC, và M là điểm bất kỳ trong tam giác. CMR:

a. $MA.\cos\frac{A}{2}+MB.\cos\frac{B}{2}+MC.\cos\frac{C}{2}\geq\frac{a+b+c}{2}$.

b. $MA^2+MB^2+MC^2\geq\frac{4S}{\sqrt{3}}$.

c. (Erdoss): Gọi P, Q, R theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên AB, BC, CA. CMR:

MA+MB+MC≥2(mặt phẳng+MQ+MR).

Bài tập 8: Cho ΔABC, các phân giác AA_1, BB_1 vả CC_1 theo thứ tự cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_2, B_2, C_2. CMR:

$$\frac{AA_1}{AA_2}+\frac{BB_1}{BB_2}+\frac{CC_1}{CC_2}\leq\frac{9}{4}.$$

Bài tập 9: Cho ΔABC, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Kéo dài AI, BI, CI theo thứ tự cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_2, B_2, C_2. CMR:

a. $IA_2+IB_2+IC_2\geq IA+IB+IC$.

b. $AA_2.BB_2.CC_2\geq\frac{8abc\sqrt{3}}{9}$.

Bài tập 10: Cho ΔABC, tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a. $P=(1+\frac{1}{\cos A})(1+\frac{1}{\cos B})(1+\frac{1}{\cos C})$.

b. $Q=(1+\frac{1}{\sin^2 A})(1+\frac{1}{\sin^2 B})(1+\frac{1}{\sin^2 C})$.

Bài tập 11: Cho ΔABC, với n∈N, chứng minh rằng:

a. $\sin nA+\sin nB+\sin nC\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

b. $\cos 2nA+\cos 2nB+\cos 2nC\ge-\frac{3}{2}$.

c. $\cos(2n+1)A+\cos(2n+1)B+\cos(2n+1)C\le\frac{3}{2}$.

Bài tập 12: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{C-A}{2}\ge\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin A+\sin B+\sin C)$.

b. $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\ge\frac{4}{3}(1+\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2})$, ΔABC nhọn.

c. $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\ge\frac{4}{\sqrt{3}}(1+\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2})$, ΔABC nhọn.

d. $tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}+8\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\ge 2$.

CHỦ ĐỀ 3

KHAI THÁC HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho ΔABC, chúng ta cần nhớ và biết cách chứng minh các đẳng thức và bất đẳng thức cơ bản sau:

1. ĐẲNG THỨC:

1. $tgA+tgB+tgC=tgA.tgB.tgC$. (1)
2. $cotgA.cotgB+cotgB.cotgC+cotgC.cotgA=1$. (2)
3. $tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}.tg\frac{A}{2}=1$. (3)
4. $cotg\frac{A}{2}+cotg\frac{B}{2}+cotg\frac{C}{2}=cotg\frac{A}{2}.cotg\frac{B}{2}.cotg\frac{C}{2}$. (4)

2. BẤT ĐẲNG THỨC

1. $tgA+tgB+tgC\ge 3\sqrt{3}$ (ΔABC nhọn). (5)
2. $cotgA+cotgB+cotgC\ge\sqrt{3}$. (6)
3. $tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$. (7)
4. $cotg\frac{A}{2}+cotg\frac{B}{2}+cotg\frac{C}{2}\ge 3\sqrt{3}$. (8)

II.PHƯƠNG PHÁP KHAI THÁC

Bài toán 1: Khai thác đẳng thức

$$tgx+cotgx=\frac{2}{\sin 2x}$$

PHƯƠNG PHÁP

1. Áp dụng cho các góc $\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}$

Ta được:

$$tg\frac{A}{2}+cotg\frac{A}{2}=\frac{2}{\sin A};$$

$$tg\frac{B}{2}+cotg\frac{B}{2}=\frac{2}{\sin B};$$

$$tg\frac{C}{2}+cotg\frac{C}{2}=\frac{2}{\sin C}.$$

Từ đó suy ra, trong mọi ΔABC luôn có:

$$\text{tg}\frac{A}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}+\text{cotg}\frac{A}{2}+\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}=\frac{2}{\sin A}+\frac{2}{\sin B}+\frac{2}{\sin C}$$

Kết hợp với (4), ta được (ĐHNT - 98) :

$$\frac{1}{2}(\text{tg}\frac{A}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}+.\text{tg}\frac{C}{2}+\text{cotg}\frac{A}{2}.\text{cotg}\frac{B}{2}.\text{cotg}\frac{C}{2})=\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}$$

Kết hợp với (7), ta được:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-\frac{1}{2}\text{cotg}\frac{A}{2}.\text{cotg}\frac{B}{2}.\text{cotg}\frac{C}{2}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Kết hợp với (8), ta được:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-\frac{1}{2}(\text{tg}\frac{A}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2})\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Kết hợp với (7),(8), ta được:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geq 2\sqrt{3}$$

2. Áp dụng cho các góc A, B, C

Ta được:

$$\text{tg}A+\text{cotg}A=\frac{2}{\sin 2A},$$

$$\text{tg}B+\text{cotg}B=\frac{2}{\sin 2B},$$

$$\text{tg}C+\text{cotg}C=\frac{2}{\sin 2C}.$$

Từ đó suy ra, trong mọi ΔABC không vuông luôn có:

$$\text{tg}A+\text{tg}B+.\text{tg}C+\text{cotg}A+\text{cotg}B+\text{cotg}C=\frac{2}{\sin 2A}+\frac{2}{\sin 2B}+\frac{2}{\sin 2C}$$

Kết hợp với (1), ta được:

$$\frac{1}{2}(\text{tg}A.\text{tg}B..\text{tg}C+\text{cotg}A+\text{cotg}B+\text{cotg}C)=\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2C}$$

Kết hợp với (6), ta được:

$$\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2C}-\frac{1}{2}\ \text{tg}A.\text{tg}B..\text{tg}C\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Kết hợp với (5), ta được:

$$\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2C}-\frac{1}{2}(\text{cotg}A+\text{cotg}B+\text{cotg}C)\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Kết hợp với (5),(6), ta được:

$$\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2C}\geq 2\sqrt{3}$$

Bài toán 2: Khai thác đẳng thức

$$\frac{1}{\sin x}-\text{cotg}x=\text{tg}\frac{x}{2}.$$

PHƯƠNG PHÁP

1. Áp dụng cho các góc $\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}$

Ta được:

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}-\text{cotg}\frac{A}{2}=\text{tg}\frac{A}{4},$$

$$\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}-\text{cotg}\frac{B}{2}=\text{tg}\frac{B}{4},$$

$$\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}-\text{cotg}\frac{C}{2}=\text{tg}\frac{C}{4}.$$

Từ đó suy ra, trong mọi ΔABC luôn có:

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}-(\text{cotg}\frac{A}{2}+\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2})=\text{tg}\frac{A}{4}+\text{tg}\frac{B}{4}+\text{tg}\frac{C}{4}.$$

Kết hợp với (4), ta được:

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}=\text{tg}\frac{A}{4}+\text{tg}\frac{B}{4}+\text{tg}\frac{C}{4}+\text{cotg}\frac{A}{2}.\text{cotg}\frac{B}{2}.\text{cotg}\frac{C}{2}.$$

Kết hợp với (8), ta được:

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}-(\text{tg}\frac{A}{4}+\text{tg}\frac{B}{4}+\text{tg}\frac{C}{4})\geq 3\sqrt{3}.$$

2. Áp dụng cho các góc A, B, C

Ta được:

$$\frac{1}{\sin A}-\text{cotg}A=\text{tg}\frac{A}{2},$$

$$\frac{1}{\sin B}-\text{cotg}B=\text{tg}\frac{B}{2},$$

$$\frac{1}{\sin C}-\text{cotg}C=\text{tg}\frac{C}{2}.$$

Từ đó suy ra, trong mọi ΔABC luôn có:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-(\text{cotg}A+\text{cotg}B+\text{cotg}C)=\text{tg}\frac{A}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}.$$

Kết hợp với (7), ta được:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-(\text{cotg}A+\text{cotg}B+\text{cotg}C)\geq\sqrt{3}.$$

Kết hợp với (6), ta được:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-(\text{tg}\frac{A}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2})\geq\sqrt{3}.$$

Kết hợp với (8), ta được:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-\frac{1}{2}(\text{tg}\frac{A}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2})\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Kết hợp với (7),(8), ta được:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geq 2\sqrt{3}$$

3. Áp dụng cho các góc 2A, 2B, 2C

Ta được:

$$\frac{1}{\sin 2A}-\text{cotg}2A=\text{tg}A,$$

$$\frac{1}{\sin 2B}-\text{cotg}2B=\text{tg}B,$$

$$\frac{1}{\sin 2C}-\text{cotg}2C=\text{tg}C.$$

Từ đó suy ra, trong mọi ΔABC luôn có:

$$\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2C}-(\text{cotg}2A+\text{cotg}2B+\text{cotg}2C)=\text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C$$

Kết hợp với (1), ta được:

$$\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2C}-(\text{cotg}2A+\text{cotg}2B+\text{cotg}2C)=\text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C$$

Kết hợp với (5), ta được:

$$\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2C}-(\text{cotg}2A+\text{cotg}2B+\text{cotg}2C)\geq 3\sqrt{3}$$

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Hãy khai thác đẳng thức:

$$\text{cotg}x-\text{tg}x=2\text{cotg}2x.$$

Bài tập 2: Hãy khai thác đẳng thức:

$$\frac{1}{\sin x}+\text{cotg}x=\text{cotg}\frac{x}{2}.$$

CHỦ ĐỀ 4

NHẬN DẠNG TAM GIÁC

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Nhận dạng tam giác

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bài toán về nhận dạng tam giác rất hay gặp trong các đề thi môn toán. Bài toán này, đề cập đến một số hướng biến đổi để nhận dạng tam giác trong các bài toán như thế.

Dạng 1: Sử dụng các phép biến đổi lượng giác để tính góc hoặc cạnh.

Dạng 2: Xác định quan hệ giữa các cạnh hoặc các góc của tam giác.

Dạng 3: Sử dụng bất đẳng thức cơ bản trong tam giác và các bất đẳng thức đại số.

Dạng 4: Sử dụng phương pháp đánh giá dựa trên các tính chất tam giác và hàm số.

Dạng 5: Dựng hình để tính toán các nhân tử trong biểu thức.

II.VÍ DỤ MINH HOẠ

Trước hết chúng ta quan tâm tới các ví dụ sử dụng các phép biến đổi lượng giác để tính góc hoặc cạnh. Với những ví dụ dạng này ta thường gặp các dạng biểu thức:

- Biểu thức biểu thị mối quan hệ giữa các góc của tam giác.
- Biểu thức biểu thị mối quan hệ giữa các góc và các cạnh của tam giác.

Ví dụ 1: Xác định dạng của ΔABC biết:

$$\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C=0. \quad (1)$$

Giải

Biến đổi VT của (1) về dạng:

$$\begin{aligned}\text{VT}&=2\sin(A+B).\cos(A-B)-\sin 2C\\&=2\sin C.\cos(A-B)-2\sin C.\cos C\\&=2[\cos(A-B)-\cos C].\sin C\\&=2[\cos(A-B)+\cos(A+B)].\sin C\\&=4\cos A.\cos B.\sin C\end{aligned}$$

Do đó (1) trở thành:

$$4\cos A.\cos B.\sin C=0 \overset{\sin C\neq 0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}\cos A=0\\ \cos B=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=\frac{\pi}{2}\\ B=\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$ ΔABC vuông tại A hoặc B.

Ví dụ 2: Xác định dạng của ΔABC biết:

$$\operatorname{cotg}\frac{B}{2}=\frac{a+c}{b}. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$(1) \Leftrightarrow \operatorname{cotg}\frac{B}{2}=\frac{2R\sin A+2R\sin C}{2R\sin B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} \Leftrightarrow \cos\frac{B}{2}=\cos\frac{A-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{B}{2}=\pm\frac{A-C}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=B+C\\ C=A+B\end{array}\right. \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A hoặc C.}$$

Ví dụ 3: Xác định dạng của ΔABC, biết:

$$\frac{1+\cos B}{\sin B}=\frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$\left(\frac{1+\cos B}{\sin B}\right)^2=\frac{(2a+c)^2}{4a^2-c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{1-\cos B}=\frac{2a+c}{2a-c}=\frac{2R(2\sin A+\sin C)}{2R(2\sin A-\sin C)}=\frac{2\sin A+\sin C}{2\sin A-\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{(1-\cos B)+(1+\cos B)}=\frac{2\sin A+\sin C}{(2\sin A-\sin C)+(2\sin A+\sin C)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{2}=\frac{2\sin A+\sin C}{4\sin A}$$

$\Leftrightarrow$ 2sinA.cosB=sinC

$\Leftrightarrow$ sin(A+B)+sin(A-B)=sinC

$\Leftrightarrow$ sin(A-B)=0

$\overset{-\pi<A-B<\pi}{\Leftrightarrow}$ A-B=0

$\Leftrightarrow$ A=B

$\Leftrightarrow$ ΔABC cân tại C.

Chú ý: Trong ba ví dụ trên chúng ta thường lựa chọn phép biến đổi biểu thức ban đầu về biểu thức chứa góc, tuy nhiên cũng có thể lựa chọn theo hướng ngược lại, để minh hoạ chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 4: Xác định dạng của ΔABC, biết:

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}. \qquad (1)$$

Giải

Cách 1: Biến đổi (1) về dạng:

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2}{4bc}=\frac{(2R.\sin A)^2}{4.2R.\sin B.2R.\sin C}=\frac{\sin^2 A}{4\sin B.\sin C}=\frac{4\sin^2\frac{A}{2}.\cos^2\frac{A}{2}}{4\sin B.\sin C}$$

$\overset{\sin\frac{A}{2}\neq 0}{\Leftrightarrow}$ sinB.sinC=$\cos^2\frac{A}{2}$

$\Leftrightarrow$ cos(B-C)-cos(B+C)=1+cosA

$\Leftrightarrow$ cos(B-C)=1 $\Leftrightarrow$ B=C $\Leftrightarrow$ ΔABC cân tại A.

Cách 2: Ta có:

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos A)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}$$

Khi đó (1) được biến đổi về dạng:

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{a^2}{4bc} \Leftrightarrow (b-c)^2=0 \Leftrightarrow b=c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại A.}$$

Chú ý: Như vậy với các biểu thức biểu thị mối quan hệ giữa các góc và các cạnh của tam giác ta thường lựa chọn hướng biến đổi chúng về biểu thức chỉ chứa các góc hoặc các cạnh thông qua định lý hàm số sin hoặc hàm số cos, còn với các đối tượng khác thông tường chúng ta sử dụng các công thức trung gian, để minh hoạ chúng ta xem xét biểu thức chứa đường cao trong ví dụ sau;

Ví dụ 5: Xác định dạng của ΔABC, biết:

$$\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}+\frac{h_c}{h_a}=\frac{h_a}{h_c}+\frac{h_c}{h_b}+\frac{h_b}{h_a}. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$\frac{\frac{2S}{a}}{\frac{2S}{b}}+\frac{\frac{2S}{b}}{\frac{2S}{c}}+\frac{\frac{2S}{c}}{\frac{2S}{a}}=\frac{\frac{2S}{a}}{\frac{2S}{c}}+\frac{\frac{2S}{c}}{\frac{2S}{b}}+\frac{\frac{2S}{b}}{\frac{2S}{a}} \Leftrightarrow \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{a}{b}$$

$\Leftrightarrow$ $b^2c+c^2a+a^2b=c^2b+b^2a+a^2c$

$\Leftrightarrow$ (a-b)(b-c)(c-a)=0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=c\\ c=a\\ a=b\end{array}\right. \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân.}$$

Chú ý: Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng tính chất góc của tam giác là:

$$0<A, B, C<\pi \text{ và } A+B+C=\pi.$$

Ví dụ 6: Xác định dạng của ΔABC biết các góc của tam giác thoả mãn phương trình:

$$\sin 2x+\sin x-\cos x=\frac{1}{2}.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin x(2\cos x+1)-(2\cos x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x-1)(2\cos x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-\frac{1}{2} \\ \sin x=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \\ x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right. \overset{0<x<\pi}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{6} \\ x=\frac{5\pi}{6} \end{array}\right..$$

Do đó ΔABC chỉ có thể có hai góc $\frac{\pi}{6}$ và một góc $\frac{2\pi}{3}$.

Vậy, ΔABC cân, góc ở đỉnh bằng $\frac{2\pi}{3}$.

Chú ý: Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng bất đẳng thức cơ bản trong tam giác và các bất đẳng thức đại số.

Ví dụ 7: Xác định dạng của ΔABC biết các góc của tam giác thoả mãn:

$$3(\cos A+2\sin B)+4(\sin A+2\cos B)=15. \qquad (1)$$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có:

$$VT=(3\cos A+4\sin A)+(6\sin B+8\cos B)$$

$$\overset{\text{Bunhiacoxpki}}{\leq} \sqrt{(3^2+4^2)(\cos^2 A+\sin^2 A)}+\sqrt{(6^2+8^2)(\sin^2 B+\cos^2 B)}$$

$$=5+10=15.$$

Do đó (1) xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \frac{\cos A}{\sin A}=\frac{3}{4} \\ \frac{\sin B}{\cos B}=\frac{6}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{4}=\text{cotg}A=\text{tg}B=\text{cotg}(\frac{\pi}{2}-B) \Rightarrow A+B=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow C=\frac{\pi}{2}$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

Ví dụ 8: Xác định dạng của ΔABC biết các góc của tam giác thoả mãn:

$$\sin^4 A+2(\sin^4 B+\sin^4 C)=2(\sin^2 B+\sin^2 C).\sin^2 A. \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$VT=\sin^4 A+(1^2+1^2)[(\sin^2 B)^2+(\sin^2 C)^2]$$

$$\overset{\text{Bunhiacoxpki}}{\geq} \sin^4 A+(\sin^2 B+\sin^2 C)^2$$

$$\overset{\text{Côsi}}{\geq} 2\sqrt{(\sin^2 B+\sin^2 C)^2\sin^4 A}=2(\sin^2 B+\sin^2 C).\sin^2 A$$

Vậy (1) có được khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \sin^2 B=\sin^2 C \\ \sin^2 B+\sin^2 C=\sin^2 A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=C \\ 2\sin^2 B=\sin^2 A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=C \\ \sqrt{2}\sin B=\sin(\pi-2B) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B=C \\ \sqrt{2}\sin B=2\sin B.\cos B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=C \\ \cos B=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=C=\frac{\pi}{4} \\ A=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

Ví dụ 9: Xác định dạng của ΔABC biết các góc của tam giác thoả mãn:

$$3\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C=\sqrt{\text{tg}^8 A+\text{tg}^8 B+\text{tg}^8 C}. \qquad (1)$$

Giải

Từ (1) ta có:

$\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C>0 \Leftrightarrow \text{tg}A, \text{tg}B, \text{tg}C>0.$

Với ΔABC bất kỳ ta luôn có (*bạn đọc hãy chứng minh lại*):

$$\text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C=\text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C. \qquad (2)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cô si, ta được:

$$\text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C=\text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C\geq 3\sqrt[3]{\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C}$$

$$\Leftrightarrow (\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C)^2\geq 27$$

$$\Leftrightarrow (\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C)^8\geq 27(\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C)^6$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C})^8\geq 3(\sqrt[3]{\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C})^6$$

$$\Leftrightarrow 9\text{tg}^2A\text{tg}^2B\text{tg}^2C\leq 3\sqrt[3]{\text{tg}^8A\text{tg}^8B\text{tg}^8C}\leq \text{tg}^8A+\text{tg}^8B+\text{tg}^8C$$

$$\Leftrightarrow 3\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C\leq\sqrt{\text{tg}^8 A+\text{tg}^8 B+\text{tg}^8 C}$$

Vậy, (1) xảy ra khi và chỉ khi

$\text{tg}A=\text{tg}B=\text{tg}C \Leftrightarrow A=B=C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Ví dụ 10: Xác định dạng của ΔABC biết các góc của tam giác nhọn và thoả mãn:

$$\frac{tg^2A}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{tg^2B}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{tg^2C}{\sin\frac{C}{2}}=18. \qquad (1)$$

Giải

Với mọi ΔABC nhọn ta luôn có (*bạn đọc hãy chứng minh lại*):

$$\begin{cases} tgA+tgB+tgC\geq 3\sqrt{3} & (1)\\ \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\leq\frac{3}{2} & (2)\end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$$\left(\frac{tg^2A}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{tg^2B}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{tg^2C}{\sin\frac{C}{2}}\right)\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\geq(tgA+tgB+tgC)^2 \quad (3)$$

$$\frac{tg^2A}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{tg^2B}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{tg^2C}{\sin\frac{C}{2}}\geq\frac{(tgA+tgB+tgC)^2}{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}\geq\frac{(3\sqrt{3})^2}{\frac{3}{2}}=18.$$

Vậy, (1) xảy ra khi và chỉ khi dấu đẳng thức xảy ra tại (1), (2), (3)

$\Leftrightarrow$ A=B=C $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Chú ý: Trong ví dụ trên chúng ta đã sử dụng hai bất đẳng thức :

- $tgA+tgB+tgC\geq 3\sqrt{3}$.
- $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leq\frac{3}{2}$.

Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng phương pháp đánh giá.

Ví dụ 11: Xác định dạng của ΔABC biết:

$$a.\cos A+b.\cos B+c.\cos C=\frac{a+b+c}{2}. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$(a-b).(\cos A-\cos B)+(b-c).(\cos B-\cos C)+(c-a).(\cos C-\cos A)=0. \qquad (2)$$

Không giảm tính tổng quát, ta giả sử A≤B≤C suy ra:

- a≤b≤c - đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.
- cosA≥cosB≥cosC - hàm số cosin nghịch biến trên (0, π).

Theo nhận xét trên $VT_{(2)}\leq 0$, do đó (2) có được khi:

$$\begin{cases}(a-b)(\cos A-\cos B)=0\\(b-c)(\cos B-\cos C)=0\\(c-a)(\cos C-\cos A)=0\end{cases}\Leftrightarrow A=B=C\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Nhận xét: Như vậy bằng việc thiết lập mối quan hệ A≤B≤C, từ đó suy ra các kết quả dựa trên tính chất của tam giác và sự biến thiên của hàm số lượng giác, chúng ta đã có được nhận xét mang tính quyết định là $VT_{(2)}\leq 0$.

Ví dụ tiếp theo chúng ta vẫn thực hiện phép đánh giá, tuy nhiên lần này sẽ dựa trên tính đơn điệu của hàm số mũ.

Ví dụ 12: Xác định dạng của ΔABC biết:

$$\sin^2A+\sin^2B=\sqrt[2006]{\sin C} \qquad (*)$$

và các góc A, B nhọn.

Giải

Vì 0<sinC≤1 nên:

$$\sqrt[2006]{\sin C}\leq\sqrt[2006]{1}=1\Rightarrow \sin^2A+\sin^2B\leq 1. \qquad (1)$$

$$\sqrt[2006]{\sin C}=\sin^{\frac{1}{2006}}C\geq\sin^2C$$

$$\Rightarrow \sin^2A+\sin^2B\geq\sin^2C\Leftrightarrow a^2+b^2\geq c^2\Leftrightarrow a^2+b^2-c^2\geq 0$$

$$\Rightarrow \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\geq 0. \qquad (2)$$

Mặt khác:

$$\sin^2A+\sin^2B=\frac{1}{2}(1-\cos 2A)+\frac{1}{2}(1-\cos 2B)$$

$$=1-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)=1-\cos(A+B).\cos(A-B)$$

$$=1+\cos C.\cos(A-B)\ \underset{0<A,B<\frac{\pi}{2}}{\overset{(2)}{\geq}}\ 1 \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra để có (*) thì :

$$\begin{cases}\sin C=1\\ \cos C.\cos(A-B)=0\end{cases}\Rightarrow C=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại C.}$$

Chú ý : Ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ sử dụng một bất đẳng thức chứa tham số quen thuộc.

Ví dụ 13: Xác định dạng của ΔABC biết:

a. Với ∀α>1 và ∀x>0, CMR:

$$x^\alpha\geq\alpha x-\alpha+1.$$

b. Xác định dạng của ΔABC, biết:

$$\left(tg\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(tg\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(tg\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}=3^{1-\sqrt{2}}.$$

Giải

a. Sử dụng đạo hàm để chứng minh - Bạn đọc tự làm.

b. Ta có:

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\ge 1$$

Do đó chọn $x=3\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}$ và $\alpha=\sqrt{2}$, ta được:

$$\left(3\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}\right)^{\sqrt{2}}\ge 3\sqrt{2}\,\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}-\sqrt{2}+1. \qquad (1)$$

tương tự ta cũng nhận được:

$$\left(3\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}\right)^{\sqrt{2}}\ge 3\sqrt{2}\,\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}-\sqrt{2}+1. \qquad (2)$$

$$\left(3\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\right)^{\sqrt{2}}\ge 3\sqrt{2}\,\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}-\sqrt{2}+1. \qquad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được:

$$\left(3\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}\right)^{\sqrt{2}}+\left(3\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}\right)^{\sqrt{2}}+\left(3\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\right)^{\sqrt{2}}\ge 3\sqrt{2}\left(\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\right)-3\sqrt{2}+3$$

$$\ge 3\sqrt{2}-3\sqrt{2}+3=3$$

$$\Leftrightarrow\left(\mathrm{tg}\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\mathrm{tg}\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\mathrm{tg}\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\ge 3^{1-\sqrt{2}}.$$

Dấu "=" xả ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

III. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: Xác định dạng của ΔABC, biết

$$\mathrm{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}. \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{2R(\sin B-\sin C)}{2R(\sin B+\sin C)}=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}.\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=\frac{\mathrm{tg}\frac{B-C}{2}}{\mathrm{tg}\frac{B+C}{2}} \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\mathrm{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{\mathrm{tg}\frac{B-C}{2}}{\mathrm{tg}\frac{B+C}{2}}\Leftrightarrow\left(\mathrm{tg}\frac{B+C}{2}-1\right)\mathrm{tg}\frac{B-C}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\frac{B+C}{2}=1\\ \mathrm{tg}\frac{B-C}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{4}\\ \frac{B-C}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}B+C=\frac{\pi}{2}\\ B-C=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=\frac{\pi}{2}\\ B=C\end{array}\right.$$

Vậy ΔABC vuông hoặc cân tại A.

Bài 2: Xác định dạng của ΔABC, biết

$$\sin A+\cos A=\frac{(p-a)a^2+(p-b)b^2+(p-c)c^2}{abc}. \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$$VP=\frac{(b+c-a)a^2+(a-b+c)b^2+(a+b-c)c^2}{2abc}$$

$$=\frac{a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)}{2abc}$$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\cos A+\cos B+\cos C.$$

Do đó (1) có dạng:

$$\sin A+\cos A=\cos A+\cos B+\cos C$$

$$\Leftrightarrow \sin A=2\cos\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}=2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\overset{\sin\frac{A}{2}\neq 0}{\Leftrightarrow}\cos\frac{A}{2}=\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{A}{2}=\frac{B-C}{2}\\ \frac{A}{2}=-\frac{B-C}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A+C=B\\ A+B=C\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}B=\frac{\pi}{2}\\ C=\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$$

⇔ ΔABC vuông tại B hoặc C.

Bài 3: Xác định dạng của ΔABC, biết:

$$\frac{a^2.\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}}+\frac{b^2.\cos\frac{C-A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}}+\frac{c^2.\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}}=a^2+b^2+c^2.\quad (*)$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$$\frac{a^2.\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}}=\frac{a.a.\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}}=\frac{2Ra.\sin A.\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}}$$

$$=2Ra.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2}=2Ra.\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=Ra.(\sin B+\sin C)=\frac{1}{2}a(b+c).\quad (1)$$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{b^2.\cos\frac{C-A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}}=\frac{1}{2}b(c+a).\quad (2)$$

$$\frac{c^2.\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}}=\frac{1}{2}c(a+b).\quad (3)$$

Thay (1), (2), (3) vào (*), ta được:

$$\frac{1}{2}a(b+c)+\frac{1}{2}b(c+a)+\frac{1}{2}c(a+b)=a^2+b^2+c^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Bài 4: Xác định dạng của ΔABC biết các góc của tam giác nhọn và thoả mãn:

$$tg^2A+tg^2B=2tg^2\frac{A+B}{2}.\quad (1)$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$$VT=tg^2A+tg^2B=\frac{1}{2}(1^2+1^2)(tg^2A+tg^2B)$$

$$\overset{\text{Bunhiacoxpki}}{\geq}\frac{1}{2}(tgA+tgB)^2=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(A+B)}{\cos A.\cos B}\right]^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2\sin(A+B)}{\cos(A+B)+\cos(A-B)}\right]^2$$

$$\geq\frac{1}{2}\left[\frac{2\sin(A+B)}{\cos(A+B)+1}\right]^2=\frac{1}{2}\left[\frac{4\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A+B}{2}}{2\cos^2\frac{A+B}{2}}\right]^2$$

$$=2tg^2\frac{A+B}{2}=VP.$$

Do vậy (1) xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}tgA=tgB\\ \cos(A-B)=1\end{cases}\Leftrightarrow A=B\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại C.}$$

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xác định dạng của ΔABC, biết:

a. $\sin4A+\sin4B+\sin4C=0.$

b. $\sin2A+\sin2B=4\sin A.\sin B.$

c. $3(\cos B+2\sin C)+4(\sin B+2\cos C)=15.$

d. $\dfrac{\cos^2A+\cos^2B}{\sin^2A+\sin^2B}=\dfrac{1}{2}(\cot g^2A+\cot g^2B).$

e. $2\cos A.\sin B.\sin C+\sqrt{3}(\sin A+\cos B+\cos C)=\dfrac{17}{4}.$

Bài tập 2: Xác định dạng của ΔABC, biết:

a. $\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}=2\sqrt{\cos\dfrac{C}{2}}.$

Mở rộng với $\sqrt[n]{\sin A}+\sqrt[n]{\sin B}=2\sqrt[n]{\cos\dfrac{C}{2}}.$

b. $\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin B}=\dfrac{2}{\cos\frac{C}{2}}.$

Mở rộng với $\dfrac{1}{\sqrt[n]{\sin A}}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{\sin B}}=\dfrac{2}{\sqrt[n]{\cos\frac{C}{2}}}.$

c. $tg^3A+tg^3B=2tg^3\dfrac{A+B}{2}$, với các góc A, B nhọn.

Mở rộng với $tg^nA+tg^nB=2tg^n\dfrac{A+B}{2}$, với các góc A, B nhọn.

CHỦ ĐỀ 5

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Hệ thức lượng trong tam giác vuông

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC vuông tại A, AH là đường cao, ta có các hệ thức sau:

1. (*Định lý Pitago*): $BC^2=AB^2+AC^2$.
2. (*Định lý hình chiếu*): $AB^2=BH.BC$.
   $AC^2=CH.BC$.
3. Công thức đường cao: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$,
4. Công thức diện tích: $S=\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{2}AB.AC$.
5. Các tỉ số lượng giác:

$$\sin B=\cos C=\frac{AC}{BC},\ \sin C=\cos B=\frac{AB}{BC},$$

$$tgB=cotgC=\frac{AC}{AB},\ cotgB=tgC=\frac{AB}{AC},$$

dựa vào các hệ thức trên để giải hai dạng toán cơ bản của tam giác vuông là:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố trong tam giác vuông.

Dạng 2: Chứng minh các hệ thức trong tam giác vuông.

Dạng 3: Nhận dạng tam giác vuông.

II.VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC vuông tại A, AB=3, AC=4, AH là đường cao. Tính BC, BH, CH và AH.

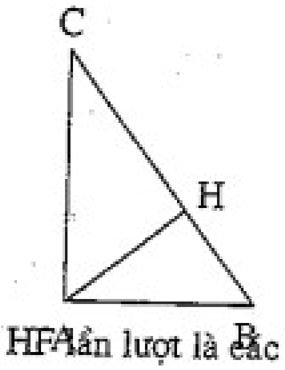
Giải

Ta có:

$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{9+16}=5.$$

$$BH=\frac{AB^2}{BC}=\frac{9}{5},\ CH=\frac{AC^2}{BC}=\frac{16}{5}$$

$$AH^2=HB.HC \Leftrightarrow AH=\sqrt{HB.HC}=\sqrt{\frac{9}{5}.\frac{16}{5}}=\frac{12}{5}.$$



Ví dụ 2: Cho ΔABC vuông tại A; AH là đường cao. HE, HF lần lượt là các ường cao của ΔAHB, ΔAHC. Chứng minh rằng:

a. $BC^2=3AH^2+BE^2+CF^2$.

b. $\sqrt[3]{BE^2}+\sqrt[3]{CF^2}=\sqrt[3]{BC^2}$.

iải

Ta có:

$$3AH^2+BE^2+CF^2=3AH^2+BH^2-HE^2+CH^2-HF^2.$$

$$=3AH^2-EF^2++(BH+HC)^2-2HB.HC.$$

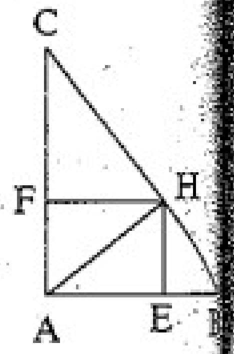
$$=2AH^2+BC^2-2AH^2=BC^2.$$

b. Trong ΔAHB:

$$BE=\frac{BH^2}{BA}\Rightarrow BE^2=\frac{BH^4}{BA^2}=\frac{BH^4}{BH.BC}=\frac{BH^3}{BC} \qquad (1)$$

Trong ΔAHC:

$$CF=\frac{CH^2}{CA}\Rightarrow CF^2=\frac{CH^4}{CA^2}=\frac{CH^4}{CH.BC}=\frac{CH^3}{BC} \qquad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra:

$$\sqrt[3]{BE^2}+\sqrt[3]{CF^2}=\frac{BH}{\sqrt[3]{BC}}+\frac{CH}{\sqrt[3]{BC}}=\frac{BC}{\sqrt[3]{BC}}=\sqrt[3]{BC}.$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC. biết:

$$\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Chứng minh rằng ΔABC vuông.

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}).\cos\frac{C}{2}+(\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}).\sin\frac{C}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}+(\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}).\cos\frac{A-B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}-1=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}).\cos\frac{C}{2}+(\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}).\cos\frac{A-B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}).(\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2})=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{C}{2}\\ \cos\frac{C}{2}=\cos\frac{A-B}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tg\frac{C}{2}=1\\ \frac{C}{2}=\frac{A-B}{2}\\ \frac{C}{2}=-\frac{A-B}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}C=\frac{\pi}{2}\\ A=\frac{\pi}{2}\\ B=\frac{\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông}$$

Ví dụ 4: Cho ΔABC, biết:

$$S=\frac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c). \qquad (1)$$

Chứng minh rằng ΔABC vuông.

Giải

Sử dụng công thức Hêrong, ta biến đổi (1) về dạng:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=(p-c)(p-b)$$

$$\Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c)=(p-c)^2(p-b)^2 \Leftrightarrow p(p-a)=(p-c)(p-b)$$

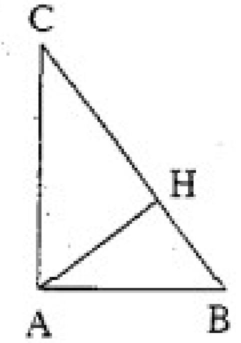
$$\Leftrightarrow (a+b+c)(b+c-a)=(a+b-c)(a+c-b) \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại}$$

III.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: Cho ΔABC vuông tại A, $tgC=\frac{2}{3}$ và đường cao AH=6. Tính độ dài các đoạn HB, HC, AB, AC.

BÀI GIẢI

Hai ΔAHB và ΔCHA đồng dạng, do đó:



$$\frac{AH}{HC}=\frac{AB}{AC}=tgC=\frac{2}{3}\Rightarrow HC=\frac{3}{2}AH=9.$$

$$\frac{BH}{AH}=\frac{AB}{AC}=tgC=\frac{2}{3}\Rightarrow BH=\frac{2}{3}AH=4.$$

Trong ΔABC. ta có:

$$AB^2=BH.BC\Leftrightarrow AB=\sqrt{BH.BC}=\sqrt{4(4+9)}=2\sqrt{13}.$$

$$AC^2=CH.BC\Leftrightarrow AC=\sqrt{CH.BC}=\sqrt{9(4+9)}=3\sqrt{13}.$$

Bài 2: Cho hai tam giác vuông ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại A và A_1 và đồng dạng với nhau. Chứng minh rằng:

a. $aa_1=bb_1+cc_1$.

b. $\frac{1}{hh_1}=\frac{1}{bb_1}+\frac{1}{cc_1}$.

BÀI GIẢI

a. Trong ΔABC , ta có:

$b=a\cos\alpha$, $c=a\sin\alpha$,

Trong $\Delta A_1B_1C_1$, ta có:

$b_1=a_1.\cos\alpha$, $c_1=a_1.\sin\alpha$

Từ đó suy ra:

$$bb_1+cc_1=aa_1.\cos^2\alpha+aa_1.\sin^2\alpha=aa_1.(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$$
$$=aa_1 \text{ , đpcm.}$$

b. Trong ΔABC , ta có:

$$b=\frac{h}{\sin\alpha},\ c=\frac{h}{\cos\alpha}.$$

Trong $\Delta A_1B_1C_1$, ta có:

$$b_1=\frac{h_1}{\sin\alpha},\ c_1=\frac{h_1}{\cos\alpha}.$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{bb_1}+\frac{1}{cc_1}=\frac{1}{\frac{hh_1}{\sin^2\alpha}}+\frac{1}{\frac{hh_1}{\cos^2\alpha}}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{hh_1}=\frac{1}{hh_1}\text{, đpcm.}$$

Bài 3: Cho ΔABC, đường cao AH. Gọi p, p_1, p_2 theo thứ tự là nửa chu vi của các tam giác ΔABC, ΔABH, ΔACH thoả mãn

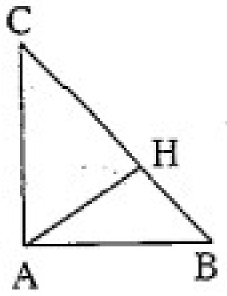
$$p_1^2+p_2^2=p^2. \qquad (1)$$

CMR ΔABC vuông.

BÀI GIẢI

Từ (1) ta có nhận xét:

$$\begin{cases} p_1^2 < p^2 \\ p_2^2 < p^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 < p \\ p_2 < p \end{cases} \Rightarrow \text{H nằm trong BC.}$$



Đặt AH=h, ta lần lượt:

$$p=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$$

$$=\frac{1}{2}[(AB+BH)+(CA+CH)]$$

$$=\frac{1}{2}[(\frac{AH}{\sin B}+AH.\text{cotg}B)+(\frac{AH}{\sin C}+AH.\text{cotg}C)]$$

$$=\frac{h}{2}[(\frac{1}{\sin B}+\text{cotg}B)+(\frac{1}{\sin C}+\text{cotg}C)]$$

$$=\frac{h}{2}(\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}).$$

$$p_1=\frac{1}{2}(AB+BH+AH)=\frac{h}{2}(\text{cotg}\frac{B}{2}+1).$$

$$p_2=\frac{1}{2}(AC+CH+AH)=\frac{h}{2}(\text{cotg}\frac{C}{2}+1).$$

Từ đó (1) được biến đổi về dạng:

$$\frac{h^2}{4}(\text{cotg}\frac{B}{2}+1)^2+\frac{h^2}{4}(\text{cotg}\frac{C}{2}+1)^2=\frac{h^2}{4}(\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow 1+\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}=\text{cotg}\frac{B}{2}.\text{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}=\text{cotg}\frac{B}{2}.\text{cotg}\frac{C}{2}-1$$

$$\Leftrightarrow 1=\frac{\cot g\frac{B}{2}.\cot g\frac{C}{2}-1}{\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}}=\text{cotg}\frac{B+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow A=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ là vuông tại A.}$$

Bài 4: Cho ΔABC vuông tại C và A≥B, chứng minh rằng:

$$aA+bB\geq\frac{\pi}{4}(a+b).$$

BÀI GIẢI

Từ giả thiết ΔABC vuông tại C và A≥B, ta được:

$$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{4} \text{ \& } a\geq b.$$

Khi đó bất đẳng thức được viết lại dưới dạng:

$$\frac{aA+bB}{2}\geq\frac{a+b}{2}.\frac{A+B}{2}$$ *(bất đẳng thức Trebusep)*

$$\Leftrightarrow \frac{aA+bB}{2}-\frac{a+b}{2}.\frac{A+B}{2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(aA+bB)-(a+b)(A+B)}{4}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)(A-B)}{4}\geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC vuông tại A, AB=15, AC=20, AH là đường cao.

a. Tính độ dài BC.
b. Tính độ dài BH.
c. Tính độ dài CH.
d. Tính độ dài AH.

Bài tập 2: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết rằng AH=$\frac{6\sqrt{13}}{13}$. BC=13. tính AB, AC, HB và HC.

a. Tính độ dài AB.
b. Tính độ dài AC.
c. Tính độ dài HB.
d. Tính độ dài HC.

Bài tập 3: Cho ΔABC vuông tại A, tgC=$\frac{3}{4}$ và đường coa AH=12.

a. Tính độ dài đoạn HB.
b. Tính độ dài đoạn CH.
c. Tính độ dài đoạn AB.
d. Tính độ dài đoạn AC.

Bài tập 4: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết rằng BH=1, AC=2a$\sqrt{5}$.

a. Tính độ dài cạnh BC.
b. Tính độ dài cạnh AB.
c. Tính độ dài đường cao AH.

Bài tập 5: Cho ΔABC vuông tại A, AB=3, AC=4, đường cao AH. Điểm I thuộc cạnh AB sao cho IA=2IB, CI cắt AH tại E. Tính độ dài CE.

Bài tập 6: Cho nửa đường tròn đường kính AB=2R, M nằm trên nửa đường tròn và $\widehat{BAM}=\alpha$ ($0<\alpha<45^0$). Tiếp tuyến với nửa đường tròn tại M cắt AB tại N. Tính các cạnh của ΔAMN.

Bài tập 7: Cho ΔABC vuông tại A. Chứng minh rằng:

a. $\cos(B-C)=\frac{2bc}{a^2}$.

b. $\text{tg}\frac{B}{2}=\frac{b}{a+c}$.

c. $\cos(m_b, m_c)\geq\frac{4}{5}$.

d. $\frac{r^2}{m_b^2+m_c^2}\leq\frac{3-2\sqrt{2}}{5}$.

Bài tập 8: Cho ΔABC vuông tại góc A, cạnh góc vuông là b, c. M là một điểm trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAM}=\alpha$. Chứng minh rằng:

$$AM=\frac{bc}{b\cos\alpha+c\sin\alpha}.$$

Bài tập 9: Cho ΔABC vuông tại A; AD là phân giác trong của $\hat{A}$. Chứng minh rằng:

$$AD=\frac{\sqrt{2}}{b+c}bc.$$

Bài tập 10: Cho ΔABC vuông ở A, đường cao AH; r, r_1, r_2 lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp tam giác vuông ABC, AHB, AHC. Chứng minh rằng:

$$r_1=r\frac{c}{a} \text{ và } r_2=r\frac{b}{a}$$

từ đó suy ra:

$$r_1^2+r_1^2=r^2$$

Bài tập 11: Cho ΔABC, đường cao AH. Gọi p, p_1, p_2 lần lượt là nửa chu vi của các ΔABC, ΔHAB, HAC thoả mãn:

$$p^2=p_1^2+p_2^2.$$

Chứng minh rằng ΔABC vuông.

Bài tập 12: Cho ΔABC vuông tại A; D là hình chiếu của A trên BC; E và F lần lượt là hình chiếu của D xuống AB và AC. Chứng minh rằng:

a. $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2=\frac{DB}{DC}$; $\left(\frac{AB}{AC}\right)^3=\frac{BE}{CF}$.

b. $AD^3=BC.EB.CF$.

Bài tập 13: Cho ΔABC, biết

$$3\sin A+4\cos A=3.$$

Chứng minh rằng ΔABC là vuông.

Bài tập 14: Cho ΔABC, biết

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2.$$

Chứng minh rằng ΔABC là vuông.

CHỦ ĐỀ 6

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC CÂN

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Hệ thức lượng trong tam giác cân

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC cân tại A, ta có:

- AB=AC ⇔ c=b,
- $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$ ⇔ B=C,
- Với K là trung điểm BC thì AK vừa là trung tuyến, đường cao, trung trực, phân giác.

cùng với việc vận dụng linh hoạt các hệ thức lượng trong tam giác thường và đặc biệt là tam giác vuông để giải hai dạng toán cơ bản của tam giác cân là:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố trong tam giác cân.

Dạng 2: Chứng minh các hệ thức trong tam giác cân.

Dạng 3: Nhận dạng tam giác cân.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

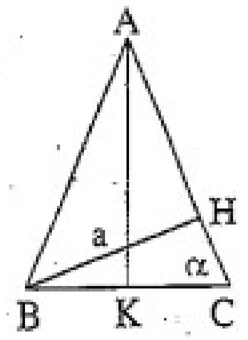
Ví dụ 1: Cho ΔABC cân tại A. Đường cao BH=a, $\widehat{ABC}=\alpha$.

a. Tính các cạnh và đường cao còn lại.

b. Tính bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

a. Trong ΔHBC, ta được:



$$\sin\alpha=\frac{BH}{BC} \Leftrightarrow BC=\frac{BH}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin\alpha}.$$

Trong ΔKAB, ta được:

$$\cos\alpha=\frac{BK}{AB} \Leftrightarrow AB=\frac{BK}{\cos\alpha}=\frac{\frac{BC}{2}}{\cos\alpha}=\frac{a}{2\sin\alpha.\cos\alpha},$$

$$\sin\alpha=\frac{AK}{AB} \Leftrightarrow AK=AB.\sin\alpha=\frac{a}{2\sin\alpha.\cos\alpha}.\sin\alpha=\frac{a}{2\cos\alpha}.$$

b. Ta có:

$$AC=2R.\sin B \Leftrightarrow R=\frac{AC}{2\sin B}=\frac{\frac{a}{2\sin\alpha.\cos\alpha}}{2\sin\alpha}=\frac{a}{4\sin^2\alpha.\cos\alpha}.$$

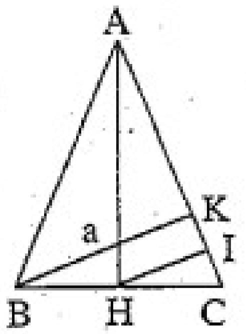
$$S_{\Delta ABC}=pr \Leftrightarrow r=\frac{S_{\Delta ABC}}{p}=\frac{\frac{1}{2}BH.AC}{\frac{1}{2}(AB+BC+CA)}=\frac{a}{2(1+\cos\alpha)}.$$

DIỄN ĐÀN TOÁN LÍ HOÁ CẤP 2+3 ĐỊA CHỈ 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

Ví dụ 2: Cho ΔABC cân đỉnh A, đường cao AH, BK. CMR:

$$\frac{1}{BK^2}=\frac{1}{BC^2}+\frac{1}{4AH^2}$$

Giải



Dựng HI⊥AC, suy ra HI là đường trung bình của ΔKBC, do đó:

$$HI=\frac{1}{2}BK.$$

Trong ΔHAC, ta có:

$$\frac{1}{HI^2}=\frac{1}{HC^2}+\frac{1}{HA^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(\frac{1}{2}BK)^2}=\frac{1}{(\frac{BC}{2})^2}+\frac{1}{HA^2}\Leftrightarrow \frac{1}{BK^2}=\frac{1}{BC^2}+\frac{1}{4AH^2}\text{, đpcm.}$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC, biết:

$$2\sin^4A+2\sin^4B+\sin^4C=2(\sin^2A+\sin^2B)\sin^2C,$$

chứng minh rằng ΔABC là vuông cân.

Giải

Áp dụng định lý hàm số sin cho ΔABC, ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$2.\left(\frac{a}{2R}\right)^4+2.\left(\frac{b}{2R}\right)^4+\left(\frac{c}{2R}\right)^4=2.\left[\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2\right].\left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow c^4+2(a^4+b^4)-2(a^2+b^2)c^2=0$$

$$\Leftrightarrow c^4-2(a^2+b^2)c^2+(a^2+b^2)^2-(a^2+b^2)^2+2(a^4+b^4)=0$$

$$\Leftrightarrow [c^2-(a^2+b^2)]+(a^2-b^2)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}c^2-(a^2+b^2)=0\\a^2-b^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c^2=a^2+b^2\\a=b\end{cases}$$

⇔ ΔABC là vuông cân tại C.

Ví dụ 4: Xác định dạng của ΔABC biết:

$$(b^2-c^2)a^3+(c^2-a^2)b^3+(a^2-b^2)c^3=0. \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$VT=(b^2-c^2)a^3-(b^3-c^3)a^2+(b-c)b^2c^2=(b-c)[(b+c)a^3-(b^2+bc+c^2)a^2+b^2c^2]$$

$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca)$$

Khi đó (1) có dạng:

$$-(b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=c\\c=a\\a=b\end{array}\right.\Leftrightarrow \Delta ABC\text{ cân.}$$

III.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: Cho ΔABC cân tại A, biết B=C=α, AI=m với I là đường tròn nội tiếp tam giác.

a. Tính độ dài cạnh BC

b. Với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. CMR

$$2R\sin\alpha= m.\text{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

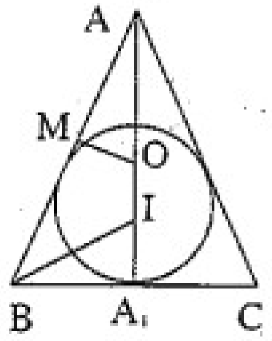
BÀI GIẢI

a. Trong ΔIAB, ta có:

$$\frac{AB}{\sin \widehat{AIB}}=\frac{AI}{\sin \widehat{ABI}}$$

$$\Leftrightarrow AB=\frac{m.\sin(90^0+\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{m.\sin[180^0-(90^0-\frac{\alpha}{2})]}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{m.\sin(90^0-\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=m.\text{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$



Trong ΔA_1AB, ta có:

$$BC=2BA_1=2AB.\cos\alpha=2m.\text{cotg}\frac{\alpha}{2}.\cos\alpha.$$

b. Gọi M là trung điểm AB, trong ΔMAO, ta có:

$$R=OA=\frac{AM}{\sin\widehat{AOM}}=\frac{\frac{AB}{2}}{\sin\alpha}=\frac{m.\text{cotg}\frac{\alpha}{2}}{2\sin\alpha}\Leftrightarrow 2R\sin\alpha= m.\text{cotg}\frac{\alpha}{2}\text{, đpcm.}$$

Bài 2: Cho ΔABC cân tại A có $A=\frac{\pi}{9}$. CMR:

$$a^3+b^3=3ab^2.$$

BÀI GIẢI

Từ giả thiết rồi bằng việc sử dụng định lý hàm số sin, ta được:

$$\begin{cases}a=2R.\sin A=2R.\sin\frac{\pi}{9}=4R.\sin\frac{\pi}{18}.\cos\frac{\pi}{18}\\b=2R.\sin B=2R.\sin\frac{4\pi}{9}=2R.\cos\frac{\pi}{18}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=2\sin\frac{\pi}{18}\Leftrightarrow a=2b\sin\frac{\pi}{18}. \qquad (1)$$

Suy ra:

$$a^3+b^3=(2b\sin\frac{\pi}{18})^3+b^3=8b^3\sin^3\frac{\pi}{18}+b^3=2b^3(3\sin\frac{\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{6})+b^3$$

$$=6b^3.\sin\frac{\pi}{18}=3b^2.(2b.\sin\frac{\pi}{18})\overset{(1)}{=}3ab^2.$$

Bài 3: Xác định dạng của ΔABC biết:

$$\sin\frac{A}{2}.\cos^3\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}.\cos^3\frac{A}{2}. \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Biến đổi (1) về dạng:

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos^3\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos^3\frac{B}{2}} \Leftrightarrow \text{tg}\frac{A}{2}.(1+\text{tg}^2\frac{A}{2})=\text{tg}\frac{B}{2}.(1+\text{tg}^2\frac{B}{2})$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}^3\frac{A}{2}-\text{tg}^3\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{A}{2}-\text{tg}\frac{B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow (\text{tg}\frac{A}{2}-\text{tg}\frac{B}{2})(\text{tg}^2\frac{A}{2}+\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}^2\frac{B}{2}+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{A}{2}-\text{tg}\frac{B}{2}=0 \Leftrightarrow \text{tg}\frac{A}{2}=\text{tg}\frac{B}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2}=\frac{B}{2} \Leftrightarrow A=B \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại C}$$

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC cân tại A, có AB=AC=2, $\widehat{ABC}=30^0$. Gọi H là trực tâm ΔABC, BK là đường cao.

a. Tính AH.
b. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABK.

Bài tập 4: Cho ΔABC cân tại A, CD là đường cao vẽ từ C. CMR:

$$AB^2+BC^2+CA^2=BD^2+2AD^2+3CD^2.$$

Bài tập 5: Cho ΔABC cân đỉnh A, có BC=a và đường cao AH=h. Gọi K là hình chiếu của B lên cạnh AC.

a. Tìm điều kiện giữa a và h để điểm K thuộc cạnh AC.
b. Giả sử điều kiện này được thoả mãn, tính AK.
c. BK cắt AH tại điểm O. Tính AO.

Bài tập 6: Xác định dạng của ΔABC biết:

a. $\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}$. b. $(p-a)\text{cotg}\frac{B}{2}=p.\text{tg}\frac{A}{2}$.

Bài tập 7: Xác định dạng của ΔABC, biết:

a. $\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}=2\sqrt{\cos\frac{C}{2}}$.

$\sqrt[n]{\sin A}+\sqrt[n]{\sin B}=2\sqrt[n]{\cos\frac{C}{2}}$.

b. $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}=\frac{2}{\cos C/2}$.

$\frac{1}{\sqrt[n]{\sin A}}+\frac{1}{\sqrt[n]{\sin B}}=\frac{2}{\sqrt[n]{\cos\frac{C}{2}}}$.

Bài tập 8: Xác định dạng của ΔABC với A, B nhọn, biết:

a. $\text{tg}^3A+\text{tg}^3B=2\text{tg}^3\frac{A+B}{2}$.

$\text{tg}^nA+\text{tg}^nB=2\text{tg}^n\frac{A+B}{2}$.

b. $\sqrt{\text{tgA}}+\sqrt{\text{tgB}}=2\sqrt{\cot g\frac{C}{2}}$.

$\sqrt[n]{\text{tgA}}+\sqrt[n]{\text{tgB}}=2\sqrt[n]{\cot gC/2}$.

CHỦ ĐỀ 7

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC ĐỀU

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Hệ thức lượng trong tam giác đều

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC đều cạnh bằng a, ta luôn có:

a. $A=B=C=60^0$.
b. Với E là trung điểm BC thì AE vừa là trung tuyến, đường cao, phân giác và trung trực và $AE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
c. Trong tâm G, trực tân H, tâm đường tròn nội tiếp I, tâm đường tròn ngoại tiếp O trùng nhau.
d. $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

dựa vào các kết quả trên để giải ba dạng toán cơ bản của tam giác đều là:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố trong tam giác đều.
Dạng 2: Chứng minh các hệ thức trong tam giác đều.
Dạng 3: Nhận dạng tam giác đều.

Vì việc tính toán các yếu tố của tam giác đều cũng như chứng minh các hệ thức trong tam giác đều thông thường chỉ thuần tuý bằng việc sử dụng công thức, do đó trong mục này chúng ta sẽ quan tâm nhiều tới bài toán nhận dạng tam giác đều.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng nếu ΔABC thoả mãn:

$$S=\frac{2R^2}{3}(\sin^3A+\sin^3B+\sin^3C).$$

thì ΔABC đều.

Giải

Áp dụng đinhl ý hàm số sin và $S=\frac{abc}{4R}$, ta biến đổi hệ thức về dạng:

$$\frac{abc}{4R}=\frac{2R^2}{3}(\frac{a^3}{8R^3}+\frac{b^3}{8R^3}+\frac{c^3}{8R^3})$$

$$\Leftrightarrow 3abc=a^3+b^3+c^3 \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-a)^2+(c-a)^2=0$$

$$\Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng nếu ΔABC thoả mãn:

$$\begin{cases} \dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}=a^2 & (1) \\ a=2b\cos C & (2) \end{cases}$$

thì ΔABC đều.

Giải

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow b^3+c^3-a^3=a^2b+a^2c-a^3 \Leftrightarrow (b+c)(b^2-bc+c^2)=(b+c)a^2$$

$$\Leftrightarrow b^2-bc+c^2=a^2 \Leftrightarrow b^2-bc+c^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$\Leftrightarrow \cos A=\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A}=60^0 \ (0^0<\hat{A}<180^0) \qquad (3)$$

Mặt khác:

$$(2) \Rightarrow \cos C=\frac{a}{2b}$$

Suy ra:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-2ab\frac{a}{2b}=b^2$$

$$\Rightarrow b=c \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra tam giác ABC đều.

Ví dụ 3: Chứng minh nếu ΔABC các các cạnh thoả mãn:

$$(p-a)(p-b)(p-c)=8abc,$$

thì ΔABC đều.

Giải

Ta biến đổi hệ thức về dạng:

$$(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=abc. \qquad (1)$$

Ta có nhận xét:

$$0<a^2-(b-c)^2=(a-b+c)(a+b-c)\le a^2. \qquad (2)$$

$$0<b^2-(a-c)^2=(b-a+c)(b+a-c)\le b^2. \qquad (3)$$

$$0<c^2-(a-b)^2=(c-a+b)(c+a-b)\le c^2 \qquad (4)$$

Nhân theo vế của (2), (3), (4), ta được:

$$(b+c-a)^2(a+c-b)^2(a+b-c)^2\le a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\le abc. \qquad (5)$$

Vậy để có (1) thì dấu "=" phải xảy ra tại (5)

$$\Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

III.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (ĐHXD - 96): Chứng minh rằng nếu ΔABC các các góc thoả mãn:

$$\cos A+\cos B+\cos C=\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}, \qquad (*)$$

thì ΔABC đều.

BÀI GIẢI

Ta có:

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}\le 2\cos\frac{A+B}{2}=2\sin\frac{C}{2}, \qquad (1)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\cos\frac{A-B}{2}=1 \Leftrightarrow A=B.$

Tương tự ta cũng có:

$$\cos B+\cos C\le 2\sin\frac{A}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos C+\cos A\le 2\sin\frac{B}{2}, \qquad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3), ta được:

$$\cos A+\cos B+\cos C\le\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$A=B=C \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Bài 2: (ĐHXD - 95): Chứng minh rằng nếu ΔABC các các góc thoả mãn:

$$2\left(\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-\sqrt{3}\right)\le \text{cotg}B+\text{cotg}C \qquad (*)$$

thì ΔABC đều.

BÀI GIẢI

Vì sinB, sinC>0, ta biến đổi (*) về dạng:

$$2(\sin C+\sin B-\sqrt{3}\sin B.\sin C)\le\cos B.\sin C+\cos C.\sin B$$

$$\Leftrightarrow [2-(\sqrt{3}\sin C+\cos C)].\sin B+[2-(\sqrt{3}\sin B+\cos B)].\sin C\le 0$$

$$\Leftrightarrow 2[1-\sin(C+\frac{\pi}{6})].\sin B+2[1-\sin(B+\frac{\pi}{6})].\sin C\le 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(C+\frac{\pi}{6})=1 \\ \sin(B+\frac{\pi}{6})=1 \end{cases} \Leftrightarrow B=C=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

IV.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

a. $\sin A+\sin B+\sin C=\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$.

b. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\sin A+\sin B+\sin C$.

c. (ĐHTH Khối D - 94): $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\frac{a+b+c}{2R}$.

d. (ĐHNN - 94): $2(a.\cos A+b.\cos B+c.\cos C)=a+b+c$.

Bài tập 2: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

a. (ĐHNT - 95): $\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}=\sqrt{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt{\cos\frac{C}{2}}$.

b. $\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}=\sqrt{\sin\frac{A}{2}}+\sqrt{\sin\frac{B}{2}}+\sqrt{\sin\frac{C}{2}}$.

c. $\text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C=\text{cotg}\frac{A}{2}+\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}$.

d. $\sqrt{\text{tg}A}+\sqrt{\text{tg}B}+\sqrt{\text{tg}C}=\sqrt{\text{cotg}\frac{A}{2}}+\sqrt{\text{cotg}\frac{B}{2}}+\sqrt{\text{cotg}\frac{C}{2}}$.

Bài tập 3: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

a. $ab+bc+ca=9R^2$.

b. $ab+bc+ca=36r^2$.

Bài tập 4: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

a. $a^2+b^2+c^2=4S\sqrt{3}$

b. $a^4+b^4+c^4=16S^2$.

c. $(b^2+c^2-a^2).a+(c^2+a^2-b^2).b+(a^2+b^2-c^2).c=3abc$.

Bài tập 5: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}.$$

Bài tập 6: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

$$h_a+h_b+h_c=9r.$$

Bài tập 7: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

$$m_a+m_b+m_c=\frac{9R}{2}.$$

Bài tập 8: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

$$\frac{l_a+l_b}{c}+\frac{l_b+l_c}{a}+\frac{l_c+l_a}{b}=3\sqrt{3}.$$

Bài tập 9: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

$$\frac{a.\cos A+b.\cos B+c.\cos C}{a.\sin B+b.\sin C+c.\sin A}=\frac{2p}{9R}.$$

CHỦ ĐỀ 8

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC CÓ DẠNG ĐẶC BIỆT

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Xét ΔABC có $\hat{C}=2\hat{B}=4\hat{A}$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có:

$$\pi=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}+2\hat{A}+4\hat{A}=7\hat{A}$$

$$\Rightarrow \hat{A}=\frac{\pi}{7},\ \hat{B}=\frac{2\pi}{7},\ \hat{C}=\frac{4\pi}{7}.$$

dựa vào đó chúng ta cùng nhau đi phát biểu và chứng minh các tính chất của ΔABC.

Tính chất 1: (ĐHHH - 96): Ta có :

$$\frac{1}{BC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}.$$

Chứng minh

Áp dụng định lý hàm số sin ta có:

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{2R\sin C}+\frac{1}{2R\sin B}=\frac{1}{2R}.\frac{\sin C+\sin B}{\sin C\sin B}$$

$$=\frac{1}{2R}.\frac{\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{4\pi}{7}.\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{1}{2R}.\frac{2.\sin\frac{3\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{1}{2R\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{BC}.$$

Tính chất 2: (CĐSP Thái Nguyên - 97): Ta có :

$$\cos A.\cos B.\cos C=-\frac{1}{8}.$$

Chứng minh

Ta có:

$$P=\cos A.\cos B.\cos C=\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}$$

Suy ra:

$$8P\sin\frac{\pi}{7}=8\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}=\sin\frac{8\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}\Rightarrow M=-\frac{1}{8}.$$

Tính chất 3: (Đề 137): Ta có:

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=\frac{5}{4}.$$

Chứng minh

Ta có:

$$M=\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=\frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}+\frac{1+\cos 2C}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(3+\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)=\frac{1}{2}(3-1-4\cos A\cos B\cos C)$$

$$=\frac{1}{2}[3-1-4(-\frac{1}{8})]=\frac{5}{4}.$$

Tính chất 4: (ĐHQG - 95): Ta có:

$a^2+b^2+c^2=7R^2$.

Chứng minh

Ta có:

$$a^2+b^2+c^2=4R^2\sin^2 A+4R^2\sin^2 B+4R^2\sin^2 C$$
$$=4R^2[3-(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)]$$
$$=4R^2(3-\frac{5}{4})=7R^2.$$

Tính chất 5: Gọi O, H lần lượt là tâm đường tròn ngoài tiếp và trực tâm ΔABC thì $OH=R\sqrt{2}$.

Chứng minh

Ta biết rằng O, H, G (trọng tâm ΔABC) thẳng hàng và:

$$\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}=3(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$
$$\Rightarrow OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2).$$

Áp dụng tính chất 4 ta có:

$$OH^2=9R^2-7R^2=2R^2 \Leftrightarrow OH=R\sqrt{2}.$$

II.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC có: $\hat{C}=2\hat{B}=4\hat{A}$. Tính giá trị các biểu thức:

a. $P=\text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C$.

b. $Q=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

Bài tập 2: Cho ΔABC có: $\hat{C}=2\hat{B}=4\hat{A}$. CMR

a. $\cos A-\cos B-\cos C=\frac{1}{2}$.

b. $\sin A-\sin B+\sin C=\frac{1}{2}$.

c. $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{1}{2}\text{cotg}\frac{A}{2}$.

d. $\sin A.\sin B.\sin C=\frac{\sqrt{7}}{8}$.

e. $\sin^2 A=\frac{3a-c}{4a}$.

f. $h_a=h_b+h_c$.

g. $bc=a(b+c)$.

h. $c^2=a^2+bc$.

PHẦN I
PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

CHƯƠNG I
CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

CHỦ ĐỀ 1
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Giải và biện luận phương trình:
sinx=m

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1. Nếu |m|>1 phương trình vô nghiệm.

Bước 2. Nếu |m|≤1, xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua sin của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng :

$$\sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+2k\pi \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua sin của góc đặc biệt, khi đó đặt m=sinα, ta được:

$$\sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+2k\pi \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có hai họ nghiệm.

Đặc biệt

- $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi, k\in Z.$
- $\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z.$
- $\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z.$

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a. $\sin x=\frac{1}{3}$.

b. $\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\sin(3x+\frac{\pi}{3})=0$.

Giải

a. Đặt $\frac{1}{3}=\sin\alpha$, khi đó:

$$\sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+2k\pi \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta có:

$$\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\sin(3x+\frac{\pi}{3})=0$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x-\frac{\pi}{4})=-\sin(3x+\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \sin(2x-\frac{\pi}{4})=\sin(-3x-\frac{\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{4}=-3x-\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ 2x-\frac{\pi}{4}=\pi-(-3x-\frac{\pi}{3})+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5} \\ x=-\frac{19\pi}{12}-2k\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$\sin(\pi\sin 2x)=1.$$

Giải

Ta có:

$$\sin(\pi\sin 2x)=1 \Leftrightarrow \pi\sin 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}+2k, k\in Z. \qquad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\left|\frac{1}{2}+2k\right|\le 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}\le k\le\frac{1}{4} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k=0.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$\sin 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{6}+2l\pi \\ 2x=\frac{5\pi}{6}+2l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+l\pi \\ x=\frac{5\pi}{12}+l\pi \end{array}\right., l\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

B[illegible]n 2: Giải và biện luận phương trình:

$$\cos x=m.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

[illegible]ện luận theo các bước sau:

Bước 1. Nếu $|m|>1$ phương trình vô nghiệm.

Bước 2. Nếu $|m|\le 1$, xét hai trường hợp:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua cos của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng :

$$\cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+2k\pi \\ x=-\alpha+2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua cos của góc đặc biệt, khi đó đặt $m=\cos\alpha$, ta được

$$\cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+2k\pi \\ x=-\alpha+2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có hai họ nghiệm.

Đặc biệt

- $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$.
- $\cos x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi$, $k\in Z$.
- $\cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi$, $k\in Z$.

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau:

a. $\sin 3x=\cos 2x$

b. $\cos(2x-\frac{\pi}{4})+\sin(x+\frac{\pi}{4})=0$.

Giải

a. Ta có:

$$\sin 3x=\cos 2x \Leftrightarrow \sin 3x=\sin(\frac{\pi}{2}-2x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=\frac{\pi}{2}-2x+2k\pi \\ 3x=\pi-(\frac{\pi}{2}-2x)+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5} \\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta có:

$$\cos(2x-\frac{\pi}{4})+\sin(x+\frac{\pi}{4})=0 \Leftrightarrow \cos(2x-\frac{\pi}{4})=-\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x-\frac{\pi}{4})=\cos(x+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{4}=x+\frac{3\pi}{4}+2k\pi \\ 2x-\frac{\pi}{4}=-x-\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi+2k\pi \\ x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Giải

Phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ \frac{\pi}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+4k & (1)\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}+4k & (2)\end{array}\right., k\in Z.$$

- Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\left|\frac{1}{2}+4k\right|\le 1\Leftrightarrow -\frac{3}{8}\le k\le\frac{1}{8}\overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k=0.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+2l\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+2l\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{7\pi}{12}+2l\pi\\ x=-\frac{\pi}{12}+2l\pi\end{array}\right., l\in Z. \qquad (3)$$

- Phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\left|-\frac{1}{2}+4k\right|\le 1\Leftrightarrow -\frac{1}{8}\le k\le\frac{3}{8}\overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k=0.$$

Khi đó (2) có dạng:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}+2l\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{2\pi}{3}+2l\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{11\pi}{12}+2l\pi\\ x=-\frac{5\pi}{12}+2l\pi\end{array}\right., l\in Z. \qquad (4)$$

Kết hợp (3) và (4), ta được:

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{11\pi}{12}+l\pi\\ x=\frac{7\pi}{12}+l\pi\end{array}\right., l\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Bài toán 3: Giải và biện luận phương trình:

$\mathrm{tg}x=m.$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Đặt điều kiện

$$\cos x\ne 0\Leftrightarrow x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z.$$

Xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua tg của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng:

$$\mathrm{tg}x=\mathrm{tg}\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi, k\in Z.$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua tg của góc đặc biệt, khi đó đặt m=tgα, ta được

$$\mathrm{tg}x=\mathrm{tg}\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi, k\in Z.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có một họ nghiệm.

Nhận xét: Như vậy với mọi giá trị của tham số phương trình luôn có nghiệm.

Ví dụ 5: Giải phương trình:

$$\mathrm{tg}\left[\frac{\pi}{4}(\cos x+\sin x)\right]=1.$$

Giải

Điều kiện

$$\cos\left[\frac{\pi}{4}(\cos x+\sin x)\right]\ne 0. \qquad (*)$$

Phương trình tương đương với:

$$\frac{\pi}{4}(\cos x+\sin x)=\frac{\pi}{4}+k\pi\Leftrightarrow \cos x+\sin x=1+4k, k\in Z. \qquad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$|1+4k|\le\sqrt{2}\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}+1}{4}\le k\le\frac{\sqrt{2}-1}{4}\overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k=0.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$\cos x+\sin x=1\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2l\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2l\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2l\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+2l\pi\end{array}\right., l\in Z \text{ thoả mãn } (*).$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Bài toán 4: Giải và biện luận phương trình:

$\mathrm{cotg}x=m.$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Đặt điều kiện

$$\sin x\ne 0\Leftrightarrow x\ne k\pi, k\in Z.$$

Xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua cotg của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng :

$$\mathrm{cotg}x=\mathrm{cotg}\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi, k\in Z.$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu điễn được quaôctg của góc đặc biệt, khi đó đặt m=cotgα, ta được

$$\text{cotg}x=\text{cotg}\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi,\ k\in Z.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có một họ nghiệm.

Nhận xét: Như vậy với mọi giá trị của tham số phương trình luôn có nghiệm.

Ví dụ 6: Giải các phương trình sau:

a. $\text{cotg}(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{1}{\sqrt{3}}$. b. $\cos x=\sqrt{3}\sin x$.

Giải

a. Điều kiện:

$$\sin(\frac{\pi}{4}-x)\neq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}-x\neq k\pi \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}-k\pi,\ k\in Z. \qquad (*)$$

Ta có:

$$\text{cotg}(\frac{\pi}{4}-x)=\text{cotg}\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{3}+k\pi$$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}-k\pi,\ k\in Z$ thoả mãn điều kiện (*).

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

b. Ta có:

$$\cos x=\sqrt{3}\sin x \Leftrightarrow \text{cotg}x=\sqrt{3}=\text{cotg}\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Bài toán 5: Biện luận theo m số nghiệm thuộc (α, β) của phương trình lượng giác cơ bản.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Giả sử với phương trình

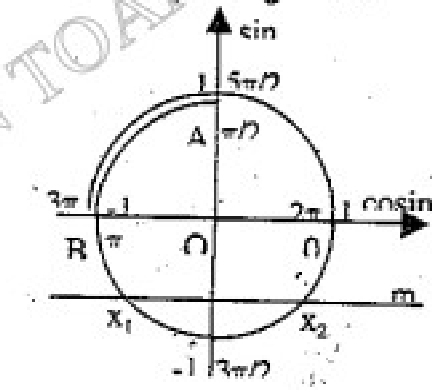
sinx=m.

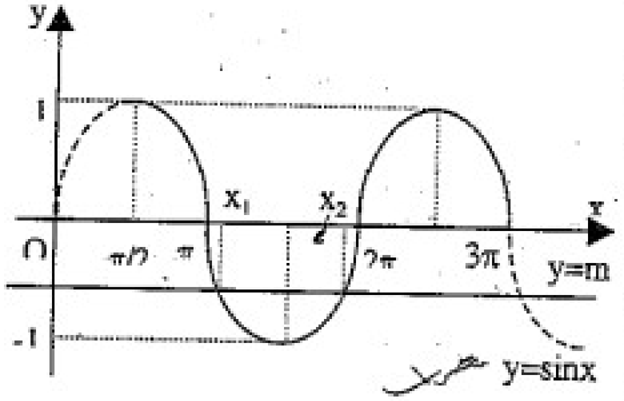
Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Biểu diễn (α, β) trên đường tròn đơn vị thành cung $\overset{\frown}{AB}$

Bước 2. Tịnh tiến đường thẳng m song song với trục cosin, khi đó số giao điểm của nó với cung $\overset{\frown}{AB}$ bằng số nghiệm thuộc (α, β) của phương trình.





Cách 2: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Vẽ đồ thị hàm số y=sinx, lấy trên (α, β).

Bước 2. Tịnh tiến đường thẳng y=m song song với trục Ox, khi đó số giao điểm của nó với phần đồ thị hàm số y=sinx bằng số nghiệm thuộc (α, β) của phương trình.

Chú ý: Phương pháp trên được mở rộng tự nhiên cho:

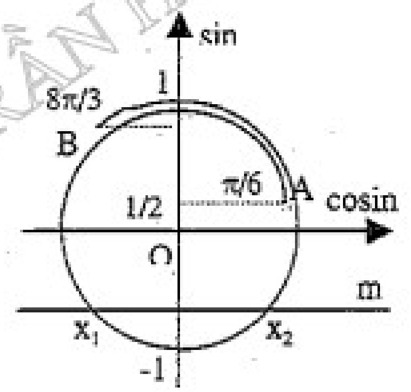
1. Phương trình cosx=m, với lưu ý khi sử dụng cách 1 ta tịnh tiến đường thẳng m song song với trục sin.
2. Với các phương trình tgx=m và cotgx=m ta chỉ có thể sử dụng cách 2.

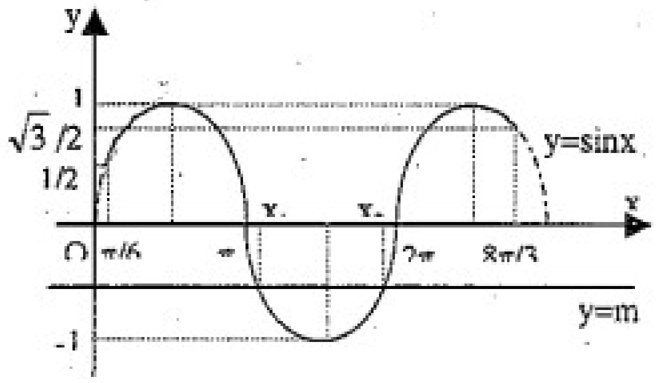
Ví dụ 7: Biện luận theo m số nghiệm thuộc $(\frac{\pi}{6}, \frac{8\pi}{3})$ của phương trình

sinx=m.

Giải

Ta lựa chọn một trong hai cách biểu diễn





Kết luận: đặt $D=(\frac{\pi}{6}, \frac{8\pi}{3})$, ta có:

- Với |m|>1, phương trình vô nghiệm.
- Với m=-1, phương trình có 1 nghiệm thuộc D.
- Với $-1<m<\frac{1}{2}$ hoặc m=1, phương trình có 2 nghiệm phân biệt thuộc D.
- Với $\frac{1}{2}\leq m<\frac{\sqrt{3}}{2}$, phương trình có 3 nghiệm phân biệt thuộc D.
- Với $\frac{\sqrt{3}}{2}\leq m<1$, phương trình có 4 nghiệm phân biệt thuộc D.

Ví dụ 8: Biện luận theo m số nghiệm thuộc $(-\frac{5\pi}{4}, \pi)$ của phương trình

$$(m+1)\sin x=(m-1)\cos x. \qquad (1)$$

Giải

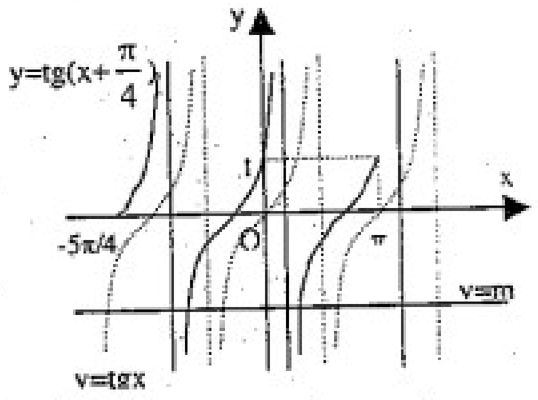
Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin x+\cos x=m(\cos x-\sin x) \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=m\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}(x+\frac{\pi}{4})=m.$$

Ta có kết luận:

- Với m≥1 hoặc m≤0, phương trình có 2 nghiệm phân biệt thuộc D.
- Với 0<m<1, phương trình có 3 nghiệm phân biệt thuộc D.



II. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (ĐHSP II - 2000): Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$$\cos[\frac{\pi}{8}(3x-\sqrt{9x^2+160x+800})]=1.$$

BÀI GIẢI

Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$\frac{\pi}{8}(3x-\sqrt{9x^2+160x+800})=2k\pi \Leftrightarrow \sqrt{9x^2+160x+800}=3x-16k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x-16k\ge 0\\ 9x^2+160x+800=(3x-16k)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge\frac{16k}{3},\ k\in Z\\ (3k+5)x=8k^2-25\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{8k^2-25}{3k+5}\ge\frac{16k}{3},\ k\in Z\\ x=\frac{8k^2-25}{3k+5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k<-\frac{5}{3},\ k\in Z & (1)\\ 9x=24k-40-\frac{25}{3k+5} & (2)\end{cases}$$

Muốn x nguyên thì trước hết từ (2) ta phải có:

$$\frac{25}{3k+5}\in Z \Leftrightarrow 3k+5 \text{ là ước của } 25 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}3k+5=-1\\ 3k+5=-5\\ 3k+5=-25\end{array}\right. \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}k=-2\\ k=-10\end{array}\right..$$

- Với k=-2, ta được x=-7.
- Với k=-10, ta được x=-31.

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên x=-7 và x=-31.

Bài 2: (ĐH Tổng Hợp Lômônốp - 1982): Giải phương trình:

$$\sqrt{-x^8+3x^4-2}\,.\sin[\pi(16x^2+2x]=0$$

BÀI GIẢI

Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$\left[\begin{array}{ll}-x^8+3x^4-2=0 & (1)\\ \begin{cases}-x^8+3x^4-2>0 & (2)\\ \sin[\pi(16x^2+2x)]=0 & (3)\end{cases}\end{array}\right.$$

- Giải (1) bằng cách đặt $t=x^4$, điều kiện t≥0, ta được:

$$(1)\Leftrightarrow t^2-3t+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^4=1\\ x^4=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\ x=\pm\sqrt[4]{2}\end{array}\right.$$

- Giải (2), dựa vào lời giải của (1) ta được:

$$(2)\Leftrightarrow 1<t<2\Leftrightarrow 1<x^4<2\Leftrightarrow 1<|x|<\sqrt[4]{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\sqrt[4]{2}<x<-1\\ 1<x<\sqrt[4]{2}\end{array}\right.$$

- Giải (3), ta có:

$$(3)\Leftrightarrow \pi(16x^2+2x)=k\pi \Leftrightarrow 16x^2+2x-k=0 \qquad (4)$$

Phương trình (4) có nghiệm khi

$$\Delta'\ge 0\Leftrightarrow 1+16k\ge 0\Leftrightarrow k\ge -\frac{1}{16} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k\ge 0$$

khi đó (4) có nghiệm $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+16k}}{16}$.

- Để nghiệm $x_1=\frac{-1+\sqrt{1+16k}}{16}$ (≥0) thoả mãn (2) điều kiện là

$$1<\frac{-1+\sqrt{1+16k}}{16}<\sqrt[4]{2} \Leftrightarrow 17<\sqrt{1+16k}<1+16\sqrt[4]{2}$$

$$\Leftrightarrow 18<k<16\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k=\{19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}.$$

- Để nghiệm $x_2=\frac{-1-\sqrt{1+16k}}{16}$ (<0) thoả mãn (2) điều kiện là

$$-\sqrt[4]{2}<\frac{-1-\sqrt{1+16k}}{16}<-1 \Leftrightarrow 15<\sqrt{1+16k}<16\sqrt[4]{2}-1$$

$$\Leftrightarrow 14<k<16\sqrt{2}-2\sqrt[4]{2} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k=\{15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm:

$$x=\{\pm 1, \pm\sqrt[4]{2}\}\cup\{x=\frac{-1+\sqrt{1+16k}}{16} \mid k=\overline{19,25}\}\cup\{x=\frac{-1-\sqrt{1+16k}}{16} \mid k=\overline{15,20}\}$$

Bài 3: Giải và biện luận phương trình:

$$\frac{a^2}{1-tg^2x}=\frac{\sin^2x+a^2-2}{\cos 2x}.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x\ne 0\\ 1-tg^2x\ne 0\\ \cos 2x\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\ne 0\\ 1-tg^2x\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\ne 0\\ tgx\ne\pm 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\ne\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\end{cases}, k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{a^2}{1-tg^2x}=\frac{\sin^2x+a^2-2}{\cos^2x-\sin^2x}\Leftrightarrow\frac{a^2}{1-tg^2x}=\frac{tg^2x+(a^2-2)(1+tg^2x)}{1-tg^2x}$$

$$\Leftrightarrow (a^2-1)tg^2x=2. \qquad (1)$$

- Với $a^2-1=0 \Leftrightarrow a=\pm1$, khi đó (1) vô nghiệm
- Với $a^2-1\neq0 \Leftrightarrow a\neq\pm1$, khi đó (1) có dạng:

$$tg^2x=\frac{2}{a^2-1}. \qquad (2)$$

Để (2) có nghiệm và thoả mãn điều kiện ta cần có:

$$\begin{cases}\dfrac{2}{a^2-1}\geq0\\ \dfrac{2}{a^2-1}\neq1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|>1\\ a\neq\pm\sqrt{3}\end{cases}.$$

Khi đó:

(2) $\Leftrightarrow tgx=\pm tg\alpha \Leftrightarrow x=\pm\alpha+k\pi,\ k\in Z.$

Kết luận:

- Với $|a|\leq1$ hoặc $a=\pm\sqrt{3}$, phương trình vô nghiệm.
- Với $a\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\backslash\{\pm\sqrt{3}\}$, phương trình có hai họ nghiệm.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a. $\sin(\pi\cos2x)=1.$ b. $\cos(\pi\cos3x)=1.$

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a. $\cos(\pi\sin x)=1.$

b. $\sin\frac{\pi}{x}=\cos(\pi x).$

c. $\cos[\frac{\pi}{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})]=\frac{1}{2}.$

Bài tập 3: Giải các phương trình sau:

a. $tg[\frac{\pi}{4}(\cos x-\sin x)]=1.$ b. $cotg[\frac{\pi}{4}(\cos x+\sin x)]=1.$

Bài tập 4: Giải và biện luận các phương trình sau:

a. $\cos(x+\alpha)+\cos(x-\alpha)=2\cos\alpha.$ c. $(m+1)\sin2x+1-m^2=0.$

b. $\sin(x+\alpha)+\cos(x-\alpha)=1+\sin\alpha.$ d. $(m+2)tg2x-\sqrt{m}=0.$

Bài tập 5: Biện luận theo m số nghiệm của phương trình

a. $\sin x=m$, với $x\in(-\frac{\pi}{4},\frac{4\pi}{3}]$.

b. $\sin(2x-\frac{\pi}{4})=m$, với $x\in[-\frac{\pi}{24},\frac{19\pi}{8}]$.

c. $\cos(x-\frac{\pi}{3})=m$, với $x\in[\frac{5\pi}{6},\frac{13\pi}{6}]$.

d. $cotg(x-\frac{\pi}{4})=m$, với $x\in(-\frac{5\pi}{4},\pi)$

CHỦ ĐỀ 2
PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Giải và biện luận phương trình :

$$a.\sin^2x+b.\sin x+c=0. \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1. Đặt sinx=t, điều kiện $|t|\leq1$, khi đó phương trình có dạng:

$$f(t)=a.t^2+b.t+c=0. \qquad (2)$$

Bước 2. Xét tuỳ theo yêu cầu của bài toán:

1. Nếu bài toán yêu cầu giải phương trình thì ta giải phương trình (2) theo t và chọn nghiệm t_0 thoả mãn điều kiện $|t|\leq1$.
2. Nếu bài toán yêu cầu giải và biện luận phương trình theo tham số thì ta giải và biện luận phương trình (2) theo t, điều kiện $|t|\leq1$, cụ thể:
   - Ta tính các biểu thức Δ, af(1) , af(-1), $\frac{S}{2}-1$, $\frac{S}{2}+1$
   - Lập bảng tổng kết:

m	Δ'	af(-1)	af(1)	$\frac{S}{2}-1$	$\frac{S}{2}+1$	So sánh các nghiệm với ±1
$-\infty$ $+\infty$						

3. Nếu bài toán yêu cầu tìm giá trị của tham số để phương trình có nghiệm

Trường hợp 1. a=0, thử vào phương trình ⇒ kết luận

Trường hợp 2. a≠0

⇔ phương trình (2) có nghiệm thoả mãn $|t|\leq1$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(2)\text{ có 1 nghiệm thuộc }[-1,1]\\(2)\text{ có 2 nghiệm thuộc }[-1,1]\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(-1).f(1)\leq0\\ \begin{cases}\Delta\geq0\\ af(-1)\geq0\\ af(1)\geq0\\ -1\leq\dfrac{S}{2}\leq1\end{cases}\end{array}\right.$$

DIỄN ĐÀN TOÁN - LÝ - HÓA CẤP 2+3 ĐỊA CHỈ: 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

4. Nếu bài toán yêu cầu tìm giá trị của tham số để phương trình có k nghiệm thuộc (α, β)

   Trường hợp 1. a=0, thử vào phương trình ⇒ kết luận

   Trường hợp 2. $a\neq 0$

   Vì $x\in(\alpha, \beta) \Leftrightarrow t\in(\alpha_1, \beta_1)$. (*)

   Từ đó dựa vào tính chất nghiệm của phương trình sinx=siny và đường tròn đơn vị biểu diễn khoảng (α, β), ta có được điều kiện cần và đủ cho phương trình (2).

Chú ý:

1. Với các yêu cầu 3, 4 ta yêu tiên việc lựa chọn phương pháp hàm số để giải phương trình.
2. Phương pháp trên cũng được sử dụng để giải và biện luận phương trình
   $a.\cos^2x+b.\cos x+c=0$.
3. Thông thường phương trình ban đầu chưa phải phương trình bậc hai theo 1 hàm số lượng giác, khi đó ta cần thực hiện một vài phép biến đổi lượng giác dựa trên nguyên tắc:
   - Nếu phương trình chứa nhiều hàm lượng giác khác nhau thì biến đổi tương đương về phương trình chỉ chứa một hàm.
   - Nếu phương trình chứa các hàm lượng giác của nhiều cung khác nhau thì biến đổi tương đương về phương trình chỉ chứa các hàm lượng giác của một cung.

Ví dụ 1: (CĐSP Hà Nội - 1997): Giải phương trình:

$$\cos 2x+\sin^2x+2\cos x+1=0.$$

Giải

Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$2\cos^2x-1+1-\cos^2x+2\cos x+1=0 \Leftrightarrow \cos^2x+2\cos x+1=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x+1)^2=0 \Leftrightarrow \cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm $x=\pi+2k\pi$, $k\in Z$.

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$4\sin^22x+8\cos^2x-5+3m=0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m=-\dfrac{4}{3}$.

b. Tìm m nguyên dương để phương trình có nghiệm.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$4(1-\cos^22x)+4(1+\cos 2x)-5+3m=0 \Leftrightarrow 4\cos^22x-4\cos 2x-3-3m=0.$$

Đặt t=cos2x, điều kiện $|t|\le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$4t^2-4t-3-3m=0 \Leftrightarrow 4t^2-4t-3=3m. \qquad (2)$$

a. Với $m=-\dfrac{4}{3}$, phương trình có dạng:

$$4t^2-4t+1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy với $m=-\dfrac{4}{3}$, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Phương trình (1) có nghiệm ⇔ (2) có nghiệm thuộc [-1, 1]

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2)\text{ có 1 nghiệm thuộc }[-1,1]\\ (2)\text{ có 2 nghiệm thuộc }[-1,1]\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(-1).f(1)\le 0\\ \begin{cases}\Delta'\ge 0\\ af(-1)\ge 0\\ af(1)\ge 0\\ -1\le \dfrac{S}{2}\le 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(5-3m)(-3-3m)\le 0\\ \begin{cases}16+12m\ge 0\\ 5-3m\ge 0\\ -3-3m\ge 0\\ -1\le \dfrac{1}{2}\le 1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\le m\le 5/3\\ \begin{cases}m\ge -4/3\\ m\le 5/3\\ m\le -1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{4}{3}\le m\le \frac{5}{3} \overset{m\in Z^+}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}\text{[illegible]}\\ m=0\\ m=1\end{array}\right..$$

Vậy với m=±1 hoặc m=0 phương trình có nghiệm.

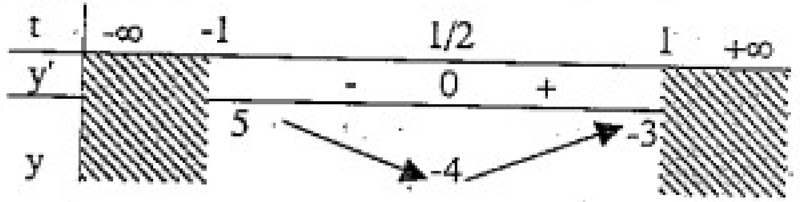
Cách 2: Phương trình (1) có nghiệm ⇔ đường thẳng y=3m cắt đồ thị hàm số $y=4t^2-4t-3$ trên đoạn [-1, 1].

Xét hàm số $y=4t^2-4t-3$ trên đoạn [-1, 1].

Đạo hàm

$$y'=8t-4,\ y'=0 \Leftrightarrow 8t-4=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là:

$$-4\le 3m\le 5 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}\le m\le \frac{5}{3} \overset{m\in Z^+}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=0 \\ m=1 \end{array}\right. .$$

Vậy với m=±1 hoặc m=0 phương trình có nghiệm.

Ví dụ 3: Cho phương trình:

$$\sin^2 3x+(m^2-3)\sin 3x+m^2-4=0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=1.

b. Tìm m để phương trình có đúng 4 nghiệm thuộc $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$.

Giải

Đặt $t=\sin 3x$, điều kiện $|t|\le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t^2+(m^2-3)t+m^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=4-m^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x=-1 \\ \sin 3x=4-m^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} \\ \sin 3x=4-m^2 \quad (2) \end{array}\right., k\in Z.$$

a. Với m=1, phương trình (2) có dạng:

$\sin 3x=3$ vô nghiệm

Vậy với m=1 phương trình có nghiệm $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$, $k\in Z$.

b. Trước hết nghiệm

$$x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\in[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}] \text{ là } x_1=\frac{7\pi}{6}.$$

Vậy để phương trình (1) có đúng 4 nghiệm thuộc $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ điều kiện là phương trình (2) có đúng 3 nghiệm khác $\frac{7\pi}{6}$ thuộc $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$.

Vì $x\in[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}] \Leftrightarrow 3x\in[2\pi, 4\pi]$,

do đó điều kiện là

$$\sin 3x=0 \Leftrightarrow 4-m^2=0 \Leftrightarrow m=\pm 2$$

khi đó ta được các nghiệm $3x\in[2\pi, 3\pi, 4\pi] \Leftrightarrow x\in[\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}]$

Vậy với m=±2 phương trình (1) có 4 nghiệm thuộc $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$.

Bài toán 2: Giải và biện luận phương trình :

$$a.tg^2x+b.tgx+c=0 \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1. Đặt điều kiện $\cos x\ne 0 \Leftrightarrow x\ne \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$

Bước 2. Đặt tgx=t, khi đó phương trình có dạng:

$$a.t^2+b.t+c=0. \qquad (2)$$

Bước 3. Giải và biện luận phương trình (2) theo t.

Chú ý:

1. Phương pháp trên được sử dụng để giải và biện luận phương trình

$$a.cotg^2x+b.cotgx+c=0$$

với điều kiện $\sin x\ne 0 \Leftrightarrow x\ne k\pi$, $k\in Z$.

2. Yêu tiên lựa chọn phương pháp hàm số để giải.

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$\sqrt{3}\,cotg^2x-4cotgx+\sqrt{3}=0.$$

Giải

Điều kiện:

$\sin x\ne 0 \Leftrightarrow x\ne k\pi$, $k\in Z$.

Đặt cotgx=t, khi đó phương trình có dạng:

$$\sqrt{3}\,t^2-4t+\sqrt{3}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{3} \\ t=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot gx=\sqrt{3} \\ \cot gx=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x=\pi+2k\pi$, $k\in Z$.

Ví dụ 5: Cho phương trình:

$$\frac{m^2-1}{\cos^2 x}-2mtgx-m^2+2=0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=2.

b. Tìm m để phương trình có đúng ba nghiệm thuộc $(-\pi, \frac{\pi}{2})$.

Giải

Điều kiện

$\cos x\ne 0 \Leftrightarrow x\ne \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$(m^2-1)(1+tg^2x)-2mtgx-m^2+2=0$

$\Leftrightarrow (m^2-1)tg^2x-2mtgx+1=0.$

Đặt tgx=t, khi đó phương trình có dạng:

$(m^2-1)t^2-2mt+1=0 \Leftrightarrow [(m-1)t-1][(m+1)t-1]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(m-1)t=1\\(m+1)t=1\end{array}\right. \qquad (2)$$

a. Với m=2, ta được:

$$\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\frac{1}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tgx=1=tg\frac{\pi}{4}\\tgx=\frac{1}{3}=tg\alpha\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\x=\alpha+k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy với m=2, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Để phương trình có đúng ba nghiệm thuộc $(-\pi, \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}m\neq\pm1\\\frac{1}{m-1}.\frac{1}{m+1}<0\end{array}\right. \Leftrightarrow m^2-1<0 \Leftrightarrow |m|<1.$$

Vậy với |m|<1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (ĐHCSND - 99): Tìm các nghiệm thoả mãn điều kiện cosx≥0 của phương trình:

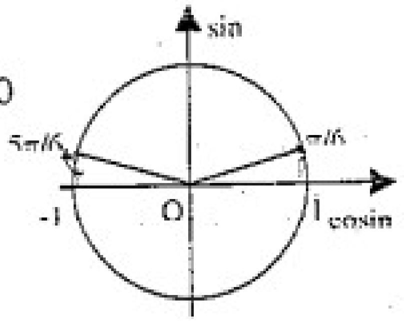
$1-5sinx+2cos^2x=0.$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$1-5sinx+2(1-sin^2x)=0 \Leftrightarrow 2sin^2x+5sinx-3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=3 \text{ (loại)}\\\sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right.$$



Bằng cách biểu diễn các họ nghiệm trên lên đường tròn đơn vị, ta thấy nghiệm $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, k∈Z thoả mãn điều kiện cosx≥0.

Chú ý: Các em học sinh cũng có thể kiểm tra bằng phương pháp đại số như sau:

- Với $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow cosx=cos(\frac{\pi}{6}+2k\pi)=cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$, thoả mãn.
- Với $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow cosx=cos(\frac{5\pi}{6}+2k\pi)=cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$, loại.

Vậy họ nghiệm của phương trình thoả mãn điều kiện cosx≥0 là $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$.

Bài 2: (ĐH Đà Nẵng -96): Cho phương trình:

$cos^2x-(2m+1)cosx+m+1=0. \qquad (1)$

a. Giải phương trình với $m=\frac{3}{2}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

BÀI GIẢI

Đặt t=cosx, điều kiện |t|≤1.
Khi đó phương trình có dạng:

$$t^2-(2m+1)t+m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{2}\\t=m\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\\cos x=m\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\\\cos x=m \quad (*)\end{array}\right., k\in Z.$$

a. Với $m=\frac{3}{2}$, phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy với $m=\frac{3}{2}$ phương trình có hai họ nghiệm $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, k∈Z.

b. Với $x\in[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow -1\leq cosx\leq0$.

Do đó phương trình (1) có nghiệm thuộc $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \Leftrightarrow -1\leq m\leq0$.

Bài 3: (CĐCN IV TPHCM - 2000): Cho phương trình:

$cos^2x+2(1-m)cosx+2m-1=0. \qquad (1)$

a. Giải phương trình với $m=\frac{1}{2}$.

b. Tìm m để phương trình có 4 nghiệm thuộc [0, 2π].

BÀI GIẢI

Đặt t=cosx, điều kiện |t|≤1.
Khi đó phương trình có dạng:

$t^2-2(m-1)t+2m-1=0. \qquad (2)$

a. Với $m=\frac{1}{2}$, phương trình có dạng:

$$t^2+t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\\t=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\\cos x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\x=\pi+2k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Phương trình (1) có 4 nghiệm thuộc $[0,\ 2\pi]$ ⇔ phương trình (2) có 2 nghiệm thoả mãn $-1<t_1<t_2\le 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ af(-1)>0\\ af(1)\ge 0\\ -1<\dfrac{S}{2}<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-4m+2>0\\ 4m-2>0\\ 2\ge 0\\ -1<m-1<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>2+\sqrt{2}\ \vee\ m<2-\sqrt{2}\\ m>\dfrac{1}{2}\\ 0<m<2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}<m<2-\sqrt{2}.$$

Vậy với $\frac{1}{2}<m<2-\sqrt{2}$ phương trình (1) có 4 nghiệm thuộc $[0,\ 2\pi]$.

Cách 2: Biến đổi (2) về dạng:

$$t^2+2t-1=2m(t-1) \overset{t=1\text{ không là nghiệm}}{\Leftrightarrow} \frac{t^2+2t-1}{t-1}=2m.$$

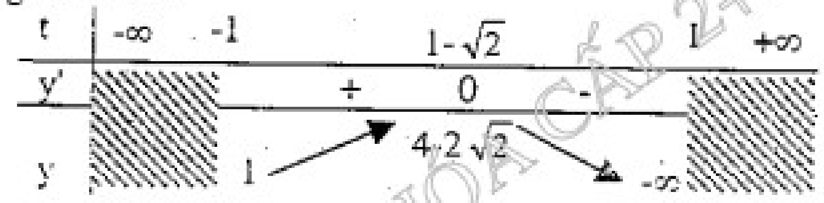
Phương trình (1) có 4 nghiệm thuộc $[0,\ 2\pi]$ ⇔ đường thẳng y=2m cắt đồ thị hàm số $y=\frac{t^2+2t-1}{t-1}$ trên (-1, 1) tại 2 điểm phân biệt.

Xét hàm số $y=\frac{t^2+2t-1}{t-1}$ trên (-1, 1)

Đạo hàm

$$y'=\frac{t^2-2t-1}{(t-1)^2},\ y'=0 \Leftrightarrow t^2-2t-1=0 \Leftrightarrow t=1\pm\sqrt{2}.$$

Bảng biến thiên


t
-∞
-1
1-√2
1
+∞
y'
+
0
-
y
1
4-2√2
-∞

Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là:

$$1<2m<4-2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<m<2-\sqrt{2}.$$

Vậy với $\frac{1}{2}<m<2-\sqrt{2}$ phương trình (1) có 4 nghiệm thuộc $[0,\ 2\pi]$.

Bài 4: (HVKTQS - 2001): Giải phương trình:

$$3\cot g^2x+2\sqrt{2}\sin^2x=(2+3\sqrt{2})\cos x \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(3\cot g^2x-3\sqrt{2}\cos x)+(2\sqrt{2}\sin^2x-2\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{\cos x}{\sin^2x}-\sqrt{2}\right)\cos x+2(\sqrt{2}\sin^2x-\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow 3(\cos x-\sqrt{2}\sin^2x)\cos x+2(\sqrt{2}\sin^2x-\cos x)\sin^2x=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sqrt{2}\sin^2x)(3\cos x-2\sin^2x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\cos^2x+\cos x-\sqrt{2}=0\\ 2\cos^2x+3\cos x-2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right. k\in Z.$$

Vậy, phương trình có bốn họ nghiệm.

Bài 5: (Đề 95): Giải và biện luận phương trình:

$$(m-1)\sin^2x-2(m+1)\cos x+2m-1=0. \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(m-1)(1-\cos^2x)-2(m+1)\cos x+2m-1=0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)\cos^2x+2(m+1)\cos x-3m+2=0.$$

Đặt t=cosx, điều kiện $|t|\le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$(m-1)t^2+2(m+1)t-3m+2=0. \qquad (2)$$

Ta đi xác định các giá trị:

$$\Delta'=(m+1)^2+(3m-2)(m-1)=4m^2-3m+3,$$

$$af(-1)=(m-1)(-4m-1),\ af(1)=3(m-1),$$

$$\frac{S}{2}-1=-\frac{m+1}{m-1}-1=-\frac{2m}{m-1},\ \frac{S}{2}+1=-\frac{m+1}{m-1}+1=-\frac{2}{m-1}.$$

Ta có bảng tổng kết sau:

m	Δ'	af(-1)	af(1)	$\frac{S}{2}-1$	$\frac{S}{2}+1$	So sánh các nghiệm với ±1
-∞						$t_1<-1<1<t_2$
	+	-	-	-	-	
-1/4		0				$t_1=-1$
	+	+	-	-	-	
0				0		$-1<t_1<1<t_2$
	+	+	-	+	-	
1		0	0	‖	‖	$t=1/4$
	+	-	+	-	+	$t_1<-1<t_2<1$
+∞						

Vậy:

- Với $m<-\frac{1}{4}$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m=-\frac{1}{4}$, phương trình có nghiệm
  $t_1=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi,\ k\in Z.$

- Với $-\frac{1}{4}<m<1$, phương trình có nghiệm

$$t_1=\frac{-m-1-\sqrt{4m^2-3m+3}}{m-1} \Leftrightarrow \cos x=t_1=\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\alpha+2k\pi,\ k\in Z.$$

- Với m=1, phương trình có nghiệm

$$t=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{4}=\cos\beta \Leftrightarrow x=\pm\beta+2k\pi,\ k\in Z.$$

- Với m>1, phương trình có nghiệm

$$t_2=\frac{-m-1+\sqrt{4m^2-3m+3}}{m-1} \Leftrightarrow \cos x=t_2=\cos\gamma$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\gamma+2k\pi,\ k\in Z.$$

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho phương trình:

$$5-4\sin^2x-8\cos^2\frac{x}{2}=3m.$$

a. Giải phương trình với $m=-\frac{4}{3}$.

b. Tìm m nguyên dương để phương trình có nghiệm.

Bài tập 2: Cho phương trình:

$$\cos2x+5\sin x+m=0.$$

a. (ĐHNN Hà Nội - 97): Giải phương trình với m=2.

b. Tìm m nguyên dương để phương trình có nghiệm.

Bài tập 3: Cho phương trình:

$$4\cos^2x - 2(m-1)\cos x-m= 0.$$

a. Giải phương trình với $m=\sqrt{3}$.

b. Tìm m nguyên dương để phương trình có nghiệm.

Bài tập 4: Xác định m để phương trình:

$$m\cos2x - 4(m-2)\cos x + 3(m-2) = 0$$

có đúng 2 nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Bài tập 5: Giải và biện luận theo m phương trình:

$$(m - 1)\sin^2x - 2(m+1)\cos x + 2m - 1 = 0$$

Bài tập 6: Giải và biện luận theo a, b phương trình:

$$\cos ax + \cos2bx - \cos[(a+2b)x] = 1$$

Bài tập 7: Biện luận số nghiệm của phương trình:

$$\cos^2x + (1 - m)\cos x + m - 1 = 0 \text{ với } 0<x<\pi$$

tuỳ theo các giá trị của m.

CHỦ ĐỀ 3

PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Giải phương trình bậc cao đối với một hàm số lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

a. Đối với phương trình bậc 3:

$$at^3+bt^2+ct+d=0. \qquad (1)$$

ta lựa chọn một trong ba hướng

Hướng 1: Nếu xác định được nghiệm t_0 thì:

$$(1) \Leftrightarrow (t-t_0)(at^2+Bt+C)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=t_0 \\ at^2+Bt+C=0 \quad (2)\end{array}\right.$$

Khi đó việc giải (1) được dẫn về việc giải (2).

Hướng 2: Sử dụng phương pháp hằng số biến thiên.

Hướng 3: Sử dụng phương pháp hàm số đồ thị.

b. Đối với phương trình bậc 4:

$$at^4+bt^3+ct^2+dt+e=0. \qquad (3)$$

ta lựa chọn một trong bốn hướng

Hướng 1: Nếu xác định được nghiệm t_0 thì:

$$(3) \Leftrightarrow (t-t_0)(at^3+Bt^2+Ct+D)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=t_0 \\ at^3+Bt^2+Ct+D=0 \quad (4)\end{array}\right.$$

Khi đó việc giải (3) được dẫn về việc giải (4).

Hướng 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

Hướng 3: Sử dụng phương pháp hằng số biến thiên.

Hướng 4: Sử dụng phương pháp hàm số đồ thị.

Ví dụ 1: (ĐH Thái Nguyên - 97): Giải phương trình:

$$4\cos^2x-\cos3x=6\cos x+2(1+\cos2x).$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\cos^2x-(4\cos^3x-3\cos x)=6\cos x+4\cos^2x$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3x+3\cos x=0 \Leftrightarrow (4\cos^2x+3)\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$\cos 3x-\cos 2x+m\cos x-1=0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=1.

b. (ĐH Y&D TPHCM - 99): Tìm m để phương trình có đúng 7 nghiệm thuộc khoảng $(-\frac{\pi}{2}, 2\pi)$.

Giải

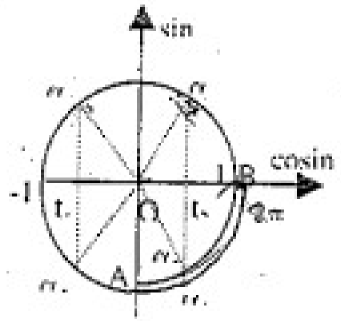
Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\cos^3x-3\cos x-(2\cos^2x-1)+m\cos x-1=0 \Leftrightarrow 4\cos^3x-2\cos^2x+(m-3)\cos x=0$$

Đặt t=cosx, điều kiện $|t|\le 1$, phương trình có dạng:

$$4t^3-2t^2+(m-3)t=0 \Leftrightarrow (4t^2-2t+m-3)t=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ 4t^2-2t+m-3=0 \quad (2) \end{array}\right.$$



- Với t=0

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi. \qquad (*)$$

a. Với m=1, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 4t^2-2t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=1 \\ \cos x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2k\pi \\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right., k\in Z$$

Vậy với m=1, phương trình có 4 họ nghiệm.

b. Trước hết ta tìm các nghiệm thoả mãn điều kiện đầu bài từ (*), ta được:

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{\pi}{2} \\ x_2=\frac{3\pi}{2} \end{array}\right.$$

Vậy để phương trình (1) có đúng 7 nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2}, 2\pi)$

⇔ phương trình (2) có nghiệm thoả mãn $-1<t_1<0<t_2<1$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} af(-1)>0 \\ af(0)<0 \\ af(1)>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m+3>0 \\ m-3<0 \\ m-1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow 1<m<3.$$

Vậy với 1<m<3 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Để các em học sinh tiện theo dõi ta có thể lý giải điều kiện trên c được bởi:

- Với $t_2\in(0, 1)$, thì bằng cách dựng đường thẳng qua t_2 vuông góc với trục cosin ta được ba nghiệm α_1, α_2 và α_3 thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$.
- Với $t_1\in(-1, 0)$, thì bằng cách dựng đường thẳng qua t_1 vuông góc với trục cosin ta được hai nghiệm α_4 và α_5 thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$.

Ví dụ 3: Cho phương trình:

$$\cot g^3x-3\cot g^2x+m=0. \qquad (1)$$

a. Với m=-1, phương trình có mấy nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$?

b. Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt thuộc $(0, \pi)$.

Giải

Điều kiện:

$$\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\pi, k\in Z.$$

Đặt cotgx=t, khi đó phương trình có dạng:

$$t^3-3t^2+m=0.$$

Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=t^3-3t^2$ với đường thẳng y=-m.

Xét hàm số $y=x^3-3x^2$ trên R.

Đạo hàm:

$$y'=3t^2-6t, \ y'=0 \Leftrightarrow 3t^2-6t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

t	-∞		0		2		+∞
y'		+	0	-	0	+	
y	-∞	↗	0	↘	-4	↗	+∞

a. Với m=-1, đường thẳng y=1 cắt đồ thị hàm số tại một điểm có hoành độ $t_1>2$, suy ra phương trình (1) nghiệm duy nhất thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$.

b. Để phương trình có ba nghiệm phân biệt thuộc $(0, \pi)$ điều kiện là

$$-4<-m<0 \Leftrightarrow 0<m<4.$$

Ví dụ 4: Cho phương trình:

$$tg^4x+(2m-1)tg^3x+(m^2-2m)tg^2x-(m^2-m+1)tgx-m+1=0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=-1.

b. Xác định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Giải

Điều kiện

$$\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z.$$

Đặt tgx=t, khi đó phương trình có dạng:

$$t^4+(2m-1)t^3+(m^2-2m)t^2-(m^2-m+1)t-m+1=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^3+2mt^2+m^2t+m-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-1=0 \\ t^3+2mt^2+m^2t+m-1=0 \quad (2) \end{array}\right. \qquad (I)$$

Để tiếp tục phân tích (2), ta viết lại (2) dưới dạng:

$$t.m^2+(2t^2+1)m+t^3-1=0.$$

Coi m là ẩn, còn t là tham số, ta được phương trình bậc 2 theo m và giải ra ta được:

$$\left[\begin{array}{l} m=1-t \\ m=-\dfrac{t^2+t+1}{t} \end{array}\right.$$

Do đó (2) được chuyển về dạng:

$$(t+m-1)[t^2+(m+1)t+1]=0.$$

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t-1=0 & \\ t+m-1=0 & \\ g(t)=t^2+(m+1)t+1=0 & (3) \end{array}\right. \qquad (II)$$

a. Với m=-1:

$$(II) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-1=0 \\ t-2=0 \\ t^2+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=1 \\ tgx=2=tg\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\alpha+k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

b. Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

$\Leftrightarrow$ (3) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 và 1-m và $1-m\neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g>0 \\ g(1)\neq 0 \\ g(1-m)\neq 0 \\ 1-m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3>0 \\ m+3\neq 0 \\ 3-2m\neq 0 \\ m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<m\neq\dfrac{3}{2} \\ m<-3 \end{array}\right..$$

Vậy với $m\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)\backslash\{\frac{3}{2}\}$ phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

II. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (ĐHNN - 2000): Giải phương trình:

$$2\cos 2x-8\cos x+7=\frac{1}{\cos x}$$

BÀI GIẢI

Điều kiện

$\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$[2(2\cos^2x-1)-8\cos x+7]\cos x=1 \Leftrightarrow 4\cos^3x-8\cos^2x+5\cos x-1=0.$$

Đặt t=cosx, điều kiện $|t|\leq 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$4t^3-8t^2+5t-1=0 \Leftrightarrow (t-1)(4t^2-4t+1)=0 \Leftrightarrow (t-1)(2t-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=1 \\ \cos x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2k\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Bài 2: (ĐHQG TPHCM Khối D - 99): Cho phương trình:

$$(\cos x+1)(\cos 2x-m\cos x)=m.\sin^2x. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=-2.

b. Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc $[0, \frac{2\pi}{3}]$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\cos x+1)(\cos 2x-m\cos x)=m(1-\cos^2x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x+1)[\cos 2x-m\cos x-m(1-\cos x)]=0 \Leftrightarrow (\cos x+1)(\cos 2x-m)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-1 \\ \cos 2x=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=\pi+2k\pi & \\ \cos 2x=m & (*) \end{array}\right., k\in Z.$$

a. Với m=-2, phương trình (*) vô nghiệm.

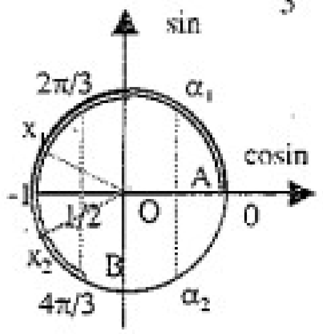
Vậy với m=-2, phương trình có một họ nghiệm $x=\pi+2k\pi$, $k\in Z$.

b. Để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc $[0, \frac{2\pi}{3}]$

$\Leftrightarrow$ phương trình cost=m (với t=2x) có đúng 2 nghiệm thuộc $[0, \frac{4\pi}{3}]$

$\Leftrightarrow -1<m\leq-\frac{1}{2}$.

Vậy với $-1<m\leq-\frac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.



Chú ý: Để các em học sinh tiện theo dõi ta có thể lý giải điều kiện trên có được bởi:

- Nếu $-\frac{1}{2}<m\leq 1$, thì bằng cách dựng đường thẳng vuông góc với trục cosin ta được hai nghiệm α_1 và α_2 nhưng khi đó dễ thấy α_2 không thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$, tức là chỉ có 1 nghiệm được chấp nhận.
- Nếu $-1<m\leq-\frac{1}{2}$, thì bằng cách dựng đường thẳng vuông góc với trục cosin ta được hai nghiệm x_1, x_2 và cả hai nghiệm này đều thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$, tức là có 2 nghiệm được chấp nhận.

Bài 3: (ĐHSP TPHCM Khối A - 2000): Cho phương trình:

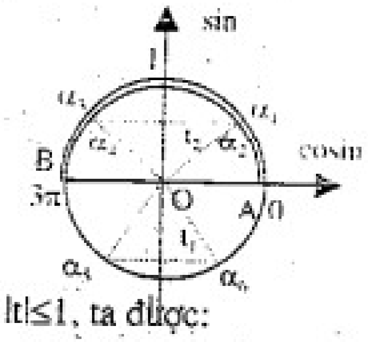
$$\sin 3x - m\cos 2x - (m+1)\sin x + m = 0$$

Tìm m để phương trình có đúng 8 nghiệm thuộc $(0, 3\pi)$.

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3\sin x - 4\sin^3 x - m(1 - 2\sin^2 x) - (m+1)\sin x + m = 0$$
$$\Leftrightarrow (4\sin^2 x - 2m\sin x + m - 2)\sin x = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 4\sin^2 x - 2m\sin x + m - 2 = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$



- Với $\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \overset{x\in(0,3\pi)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x_1 = \pi \\ x_2 = 2\pi \end{array}\right.$$

- Với phương trình (1), đặt $t = \sin x$, điều kiện $|t| \le 1$, ta được:

$$4t^2 - 2mt + m - 2 = 0. \qquad (2)$$

Vậy để phương trình có đúng 8 nghiệm thuộc $(0, 3\pi)$

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 6 nghiệm thuộc $(0, 3\pi)\backslash\{\pi, 2\pi\}$

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm thoả mãn $-1 < t_1 < 0 < t_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} af(-1) > 0 \\ af(0) < 0 \\ af(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 2 > 0 \\ m - 2 < 0 \\ -m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m < 2.$$

Vậy với $-\frac{2}{3} < m < 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Để các em học sinh tiện theo dõi ta có thể lý giải điều kiện trên có được bởi:

- Với $t_2 \in (0, 1)$, thì bằng cách dựng đường thẳng qua t_2 vuông góc với trục sin ta được bốn nghiệm $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ và α_4 thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$.
- Với $t_1 \in (-1, 0)$, thì bằng cách dựng đường thẳng qua t_1 vuông góc với trục sin ta được hai nghiệm α_5 và α_6 thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải phương trình:

$$4(\sin 3x - \cos 2x) = 5(\sin x - 1)$$

Bài tập 2. Cho phương trình:

$$\sin 3x + \sin x - 2\cos^2 x = m.$$

a. Giải phương trình với m=0.

b. Tìm m để phương trình có 6 nghiệm phân biệt thuộc $[0, \pi]$.

Bài tập 3. Xác định m để phương trình:

$$\cos^4 x + (m-2)\sin^2 x + 4 = 0 \text{ vô nghiện}$$

CHỦ ĐỀ 4
PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI sinx VÀ cosx

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Giải và biện luận phương trình

$$a\sin x + b\cos x = c \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực theo các bước:

Bước 1. Kiểm tra:

1. Nếu $a^2 + b^2 < c^2$ phương trình vô nghiệm.
2. Nếu $a^2 + b^2 \ge c^2$, khi đó để tìm nghiệm của phương trình (1) ta thực hiện tiếp bước 2.

Bước 2. Chia hai vế phương trình (1) cho $\sqrt{a^2+b^2}$, ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ nên tồn tại góc β sao cho

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\beta.$$

Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$\sin x.\cos\beta + \sin\beta.\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Đây là phương trình cơ bản của sin.

Cách 2: Thực theo các bước:

Bước 1. Với $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$, kiểm tra vào phương trình

Bước 2. Với $\cos\frac{x}{2} \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \pi + 2k\pi$, đặt $t = \text{tg}\frac{x}{2}$, suy ra

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ và } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$a.\frac{2t}{1+t^2} + b.\frac{1-t^2}{1+t^2} = c \Leftrightarrow (c+b)t^2 - 2at + c - b = 0 \qquad (2)$$

Bước 3. Giải phương trình (2) theo t.

Cách 3: Với những yêu cầu biện luận số nghiệm của phương trình trong (α, β), ta có thể lựa chọn phương pháp hàm số đồ thị.

Cách 4: Với những yêu cầu biện luận tính chất nghiệm của phương trình trong (α, β), ta có thể lựa chọn phương pháp điều kiện cần và đủ.

Nhận xét quan trọng:

1. Cách 1 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm, vô nghiệm hoặc giải và biện luận phương trình theo tham số.
2. Cách 2 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm thuộc tập D với $D\subset[0, 2\pi]$.
3. Cách 3 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu biện luận theo tham số để phương trình k có nghiệm thuộc tập D với $D\cap[0, 2\pi]\neq\varnothing$.
4. Từ cách giải 1 ta có được kết quả sau:

$$-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$$

kết quả đó gợi ý cho bài toán về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số dạng $y=a.\sin x+b.\cos x$, $y=\dfrac{a.\sin x+b.\cos x}{c.\sin x+d.\cos x}$ và phương pháp đánh giá cho một số phương trình lượng giác.

Dạng đặc biệt:

- $\sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$
- $\sin x-\cos x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2}$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x+\frac{1}{2}\cos 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \sin 3x.\cos\frac{\pi}{6}+\cos 3x.\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(3x+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ 3x+\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}\\ x=\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}\end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$3\sin x-4\cos x=-\frac{5}{2}$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x=-\frac{1}{2}$$

Đặt $\dfrac{3}{5}=\cos\alpha$ thì $\dfrac{4}{5}=\sin\alpha$, khi đó ta được:

$$\sin x.\cos\alpha-\cos x.\sin\alpha=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin(x-\alpha)=\sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\alpha=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ x-\alpha=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha-\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+\alpha+2k\pi\end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$\sin 2x-3\cos 2x=3$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\sin 2x-\frac{3}{\sqrt{10}}\cos 2x=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Đặt $\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\cos\alpha$ thì $\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\sin\alpha$, khi đó ta được:

$$\sin 2x.\cos\alpha-\cos 2x.\sin\alpha=\sin\alpha\Leftrightarrow\sin(2x-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-\alpha=\alpha+2k\pi\\ 2x-\alpha=\pi-\alpha+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha+k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 2x=3(1+\cos 2x)\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x=6\cos^2x\Leftrightarrow(\sin x-3\cos x).\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x-3\cos x=0\\ \cos x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}tgx=3=tg\alpha\\ \cos x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha+k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$2\sin x-3\cos x=-2$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{2}{\sqrt{13}}\sin x-\frac{3}{\sqrt{13}}\cos x=-\frac{2}{\sqrt{13}}$$

Đặt $\frac{2}{\sqrt{13}}=\cos\alpha$ thì $\frac{3}{\sqrt{13}}=\sin\alpha$, khi đó ta được:

$$\sin x.\cos\alpha-\cos x.\sin\alpha=-\cos\alpha \Leftrightarrow \sin(x-\alpha)=\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\alpha=\alpha-\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x-\alpha=\pi-\alpha+\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\alpha-\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$2(1+\sin x)=3\cos x \Leftrightarrow 2(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2=3(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})$$

$$\Leftrightarrow [2(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})-3(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})](\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=0 \\ \cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=\frac{1}{5}=tg\alpha \\ tg\frac{x}{2}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2}=\alpha+k\pi \\ \frac{x}{2}=\frac{3\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\alpha+2k\pi \\ x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Chú ý: Các em học sinh cần có thói quen kiểm tra điều kiện $a^2+b^2\geq c^2$ ra nháp trước khi đi giải phương trình bởi có nhiều bài thi đã cố tình tạo ra những phương trình không thoả mãn điều kiện trên với mục đích kiểm tra kiến thức cơ bản của các em. Cụ thể như đề thi ĐHGTVT - 2000.

Ví dụ 5: (ĐHGTVT - 2000): Giải phương trình:

$$2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\cos x=3+\cos 2x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{2}\sin 2x+\sqrt{2}(1+\cos 2x)=3+\cos 2x \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x+(\sqrt{2}-1)\cos 2x=3-\sqrt{2}$$

Ta có:

$$\begin{cases} a=\sqrt{2} \\ b=\sqrt{2}-1 \\ c=3-\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2+(\sqrt{2}-1)^2=5-2\sqrt{2} \\ c^2=(3-\sqrt{2})^2=11-6\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2<c^2$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Chú ý: Việc lựa chọn các phép biến đổi lượng giác phù hợp trong nhiều trường hợp ta sẽ tìm được phép biểu diễn chẵn cho các họ nghiệm. Chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 6: Giải phương trình:

$$(1+\sqrt{3})\sin x+(1-\sqrt{3})\cos x=2$$

Giải

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sin x+\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Đặt $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\cos\alpha$ thì $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\sin\alpha$, khi đó ta được:

$$\sin x.\cos\alpha+\cos x.\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha)=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\alpha=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x+\alpha=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}-\alpha+2k\pi \\ x=\frac{3\pi}{4}-\alpha+2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin x+\cos x)+\sqrt{3}(\sin x-\cos x)=2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})-\sqrt{6}\cos(x+\frac{\pi}{4})=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4}).\cos\frac{\pi}{3}-\cos(x+\frac{\pi}{4}).\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x-\frac{\pi}{12}=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Nhận xét:

1. Như vậy bằng cách 1 ta tìm được nghiệm của phương trình không tường minh, trong khi đó nếu sử dụng cách 2 ta thấy nghiệm của phương trình rất chẵn.
2. Một vài tài liệu tham khảo giải phương trình bằng cách đặt $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, dẫn tới phương trình

$$(3-\sqrt{3})t^2-2(1+\sqrt{3})t+\sqrt{3}+1=0 \Leftrightarrow t_1=\frac{1}{\sqrt{3}} \vee t_2=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

- Với $t_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ta được:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z.$$

- Với $t_2=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ ta được:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=-\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}.\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=-\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}=\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{5\pi}{12}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z.$$

Ví du 7: Giải phương trình:

$$2(\sqrt{3}\sin x-\cos x)=3\sin 2x+\sqrt{7}\cos 2x$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sqrt{3}\sin x-2\cos x=3\sin 2x+\sqrt{7}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\frac{3}{4}\sin 2x+\frac{\sqrt{7}}{4}\cos 2x$$

Đặt $\frac{3}{4}=\cos\alpha$ thì $\frac{\sqrt{7}}{4}=\sin\alpha$, khi đó ta được:

$$\sin x.\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}=\sin 2x\cos\alpha+\cos 2x\sin\alpha \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{6})=\sin(2x+\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\alpha=x-\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ 2x+\alpha=\pi-x+\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}-\alpha+2k\pi \\ x=\frac{7\pi}{18}-\frac{\alpha}{3}+\frac{2k\pi}{3} \end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Chú ý: Ví dụ trên đã minh hoạ cụ thể phương pháp giải phương trình dạng:

$$a.\sin(kx)+b.\cos(kx)=c.\sin(lx)+d.\cos(lx) \qquad \text{(I)}$$

với điều kiện $a^2+b^2=c^2+d^2$.

Và sự mở rộng khác cho dạng phương trình trên như sau:

$$a.\sin(kx)+b.\cos(kx)=\sqrt{a^2+b^2}.\sin(lx) \qquad \text{(II)}$$

Để minh hoạ ta xem xét ví dụ sau:

Ví du 8: Giải phương trình:

$$2\sin x(\cos x-1)=\sqrt{3}\cos 2x$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin x.\cos x-2\sin x=\sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin x \qquad (*)$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin x \Leftrightarrow \sin 2x.\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2x.\sin\frac{\pi}{3}=\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x-\frac{\pi}{3})=\sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{3}=x+2k\pi \\ 2x-\frac{\pi}{3}=\pi-x+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x=\frac{4\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} \end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Nhận xét: Như vậy bằng một vài phép biến đổi lượng giác thông thường ta đã chuyển phương trình ban đầu về (*) và đó chính là dạng (II).

Ví dụ 9: Giải phương trình:

$$\sqrt{2}(\sin x+\sqrt{3}\cos x)=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{2}(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x.\cos\frac{\pi}{3}+\cos x.\sin\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{3}.\cos 2x-\cos\frac{\pi}{3}.\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{3})=\sin(\frac{\pi}{3}-2x)=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{3})=2\sin(x+\frac{\pi}{3}).\cos(x+\frac{\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{2}-2\cos(x+\frac{\pi}{3})]\sin(x+\frac{\pi}{3})=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos(x+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(x+\frac{\pi}{3})=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+2k\pi \\ x=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 10: Cho phương trình:

$$\sqrt{3}\sin 2x - m\cos 2x = 1.$$

a. Giải phương trình với m=1.

b. Chứng tỏ rằng phương trình có nghiệm với mọi m.

Giải

a. Với m=1, phương trình có dạng:

$$\sqrt{3}\sin 2x - m\cos 2x = 1 \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x.\cos\frac{\pi}{6} - \cos 2x.\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy với m=1 phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta có:

$$a^2 + b^2 = 3 + m^2 > 1 = c^2, \forall m$$

Vậy phương trình có nghiệm với mọi m.

Ví dụ 11: (ĐHKT - 2001): Giải và biện luận phương trình:

$$4m(\sin x + \cos x) = 4m^2 + 2(\cos x - \sin x) + 3.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2(2m+1)\sin x + 2(2m-1)\cos x = 4m^2 + 3$$

Xét hiệu

$$a^2 + b^2 - c^2 = 4(2m+1)^2 + 4(2m-1)^2 - (4m^2+3)^2 = -(16m^4 - 8m^2 + 1) = -(4m^2-1)^2 \le 0$$

Vậy phương trình chỉ có nghiệm

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}.$$

- Với $m = \frac{1}{2}$, phương trình có dạng:

  $$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z.$$

- Với $m = -\frac{1}{2}$, phương trình có dạng:

  $$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in Z.$$

- Với $m \ne \pm\frac{1}{2}$, phương trình vô nghiệm

Ví dụ 12: Cho phương trình:

$$(m+2)\sin x - 2m\cos x = 2m + 2. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=-2.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, 0]$.

Giải

Xét hai trường hợp

Với $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$, thay vào phương trình ta được:

$$(m+2)\sin(\pi + 2k\pi) - 2m\cos(\pi + 2k\pi) = 2m + 2 \Leftrightarrow 2m = 2m + 2 \text{ (MT)}$$

Vậy x=π+2kπ, k∈Z không phải là nghiệm của phương trình với mọi m.

Với $\cos\frac{x}{2} \ne 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \ne \pi + 2k\pi, k \in Z.$

Đặt $t = tg\frac{x}{2}$, suy ra $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ & $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$\frac{(m+2)t}{1+t^2} - \frac{2m(1-t^2)}{1+t^2} = 2m + 2 \Leftrightarrow t^2 - (m+2)t + 2m + 1 = 0. \qquad (2)$$

a. Với m=-2, phương trình (2) có dạng:

$$t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{3} \\ t = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = \sqrt{3} \\ tg\frac{x}{2} = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$$

Vậy với m=-2, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Vì $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in [-\frac{\pi}{4}, 0]$ suy ra $t \in [-1, 0]$.

Cách 1: Để (1) có nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, 0] \Leftrightarrow$ (2) có nghiệm thuộc [-1, 0]

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(2) có 1 nghiệm thuộc } [-1,0] \\ \text{(2) có 2 nghiệm thuộc } [-1,0] \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-1).f(0) \le 0 \\ \left\{\begin{array}{l} \Delta \ge 0 \\ af(-1) \ge 0 \\ af(0) \ge 0 \\ -1 \le \frac{S}{2} \le 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (3m+4)(2m+1) \le 0 \\ \left\{\begin{array}{l} m^2 - 4m \ge 0 \\ 3m + 4 \ge 0 \\ 2m + 1 \ge 0 \\ -1 \le \frac{m+2}{2} \le 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \le m \le -\frac{1}{2}.$$

Vậy với $-\frac{4}{3} \le m \le -\frac{1}{2}$ phương trình có nghiệm.

Cách 2: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\frac{t^2-2t+1}{t-2}=m$$

Phương trình (1) có nghiệm ⇔ đường thẳng y=m cắt đồ thị hàm số $y=\frac{t^2-2t+1}{t-2}$ trên đoạn [-1, 0].

Xét hàm số (C): $y=\frac{t^2-2t+1}{t-2}$ trên đoạn [-1, 0].

Đạo hàm

$$y'=\frac{t^2-4t+3}{(t-2)^2}>0 \text{ với } \forall t\in[-1,0] \Leftrightarrow \text{hàm số đồng biến trên } [-1, 0].$$

Do đó đường thẳng y=m cắt đồ thị hàm số (C) trên đoạn [-1, 0]

$$\Leftrightarrow y(-1)\le m\le y(0) \Leftrightarrow -\frac{4}{3}\le m\le -\frac{1}{2}.$$

Vậy với $-\frac{4}{3}\le m\le -\frac{1}{2}$ phương trình có nghiệm.

Ví dụ 13: Cho phương trình:

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=m. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=-1.

b. Biện luận theo m số nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{6}, 2\pi]$ của phương trình.

Giải

a. Với m=-1, phương trình có dạng:

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=-1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{6})=\sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x+\frac{\pi}{6}=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x=\pi+2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy với m=-1 phương trình có hai họ nghiệm.

b. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đường thẳng y=m với phần đồ thị hàm số $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ trên $D=(-\frac{\pi}{6}, 2\pi]$.

Xét hàm số $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$.

Miền xác định $D=(-\frac{\pi}{6}, 2\pi]$.

Đạo hàm:

$$y'=\sqrt{3}\cos x-\sin x,$$

$$y'=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x-\sin x=0 \Leftrightarrow \cos(x+\frac{\pi}{6})=0 \overset{x\in D}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x=\pi/3 \\ x=4\pi/3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\pi/6$		$\pi/3$		$4\pi/3$		2π
y'		+	0	-	0	+	
y	0	↗	2	↘	-2	↗	1

Kết luận:

- Với |m|>2, phương trình vô nghiệm.
- Với m=±2, phương trình có 1 nghiệm thuộc D.
- Với -2<m≤0 hoặc 1<m<2, phương trình có 2 nghiệm thuộc D.
- Với 0<m≤1, phương trình có 3 nghiệm thuộc D.

Ví dụ 14: Biện luận theo m số nghiệm thuộc $[0, \frac{3\pi}{2}]$ của phương trình:

$$m\sin x+\cos x=2m. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos x=m(2-\sin x) \Leftrightarrow \frac{\cos x}{2-\sin x}=m$$

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đường thẳng y=m với đồ thị hàm số $y=\frac{\cos x}{2-\sin x}$ trên $D=[0, \frac{3\pi}{2}]$.

Xét hàm số $y=\frac{\cos x}{2-\sin x}$.

Miền xác định $D=[0, \frac{3\pi}{2}]$.

Đạo hàm:

$$y'=\frac{-\sin x.(2-\sin x)+\cos x.\cos x}{(2-\sin x)^2}=\frac{1-2\sin x.}{(2-\sin x)^2},$$

$$y'=0 \Leftrightarrow 1-2\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \overset{x\in D}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x=\pi/6 \\ x=5\pi/6 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\pi/6$		$5\pi/6$		$3\pi/2$
y'		+	0	-	0	+	
y	1/2	↗	$1/\sqrt{3}$	↘	$-1/\sqrt{3}$	↗	0

Kết luận:

- Với $|m|>\frac{1}{\sqrt{3}}$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ hoặc $0<m<\frac{1}{2}$, phương trình có 1 nghiệm thuộc D.
- Với $-\frac{1}{\sqrt{3}}<m\le 0$ hoặc $\frac{1}{2}\le m<\frac{1}{\sqrt{3}}$, phương trình có 2 nghiệm thuộc D.

Ví dụ 15: Cho phương trình:

$$\sqrt{3}\,\sin x + m\cos x = 1.$$

Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1, x_2 \in [0, 2\pi)$ sao cho $x_1 + x_2 = \frac{2\pi}{3}$.

Giải

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có nghiệm $x = \alpha \in [0, \frac{2\pi}{3}]$, khi đó $x = \frac{2\pi}{3} - \alpha$ cũng là nghiệm, như vậy:

$$\begin{cases} \sqrt{3}\sin\alpha + m\cos\alpha = 1 \\ \sqrt{3}\sin(\frac{2\pi}{3} - \alpha) + m\cos(\frac{2\pi}{3} - \alpha) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\cos\alpha = 1 - \sqrt{3}\sin\alpha \\ m(-\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha) = 1 - \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\alpha}{-\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha} = \frac{1 - \sqrt{3}\sin\alpha}{2 - 3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}$$

$$\Leftrightarrow (2 - 3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha)\cos\alpha = (-\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha)(1 - \sqrt{3}\sin\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 3\cos 2\alpha + \sqrt{3}\sin 2\alpha = 3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\alpha.\cos\frac{\pi}{6} + \sin 2\alpha.\sin\frac{\pi}{6} = \cos\alpha.\cos\frac{\pi}{6} - \sin\alpha.\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \cos(2\alpha - \frac{\pi}{6}) = \cos(\alpha + \frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha - \frac{\pi}{6} = \alpha + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2\alpha - \frac{\pi}{6} = -\alpha - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \alpha = \frac{2k\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{3} \\ \alpha = 0 \\ \alpha = \frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

- Với $\alpha = \frac{\pi}{3}$, thay vào phương trình ta được:

$$\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} + m\cos\frac{\pi}{3} = 1 \Leftrightarrow m = -1.$$

- Với $\alpha = 0$, thay vào phương trình ta được:

$$\sqrt{3}\sin 0 + m\cos 0 = 1 \Leftrightarrow m = 1.$$

- Với $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, thay vào phương trình ta được:

$$\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3} + m\cos\frac{2\pi}{3} = 1 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với m=±1 là điều kiện cần.

Điều kiện đủ:

- Với m=1, thay vào phương trình ta được:

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \overset{x \in [0, 2\pi)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

Nhận xét rằng khi đó $x_1 + x_2 = \frac{2\pi}{3}$, do đó m=1 thoả mãn.

- Với m=-1 - *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (ĐHMĐC - 95): Giải phương trình:

$$3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3\sin 3x - 4\sin^3 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 \Leftrightarrow \sin 9x - \sqrt{3}\cos 9x = 1$$

Bạn đọc tự giải tiếp.

Bài 2: (ĐHMTCN - 96): Giải phương trình:

$$\cos 7x.\cos 5x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 - \sin 7x.\sin 5x$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos 7x.\cos 5x + \sin 7x.\sin 5x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = 1$$

Bạn đọc tự giải tiếp.

Bài 3: (ĐHKTQD - 97): Tìm các nghiệm thuộc khoảng $(\frac{2\pi}{5}, \frac{6\pi}{7})$ của phương trình:

$$\sqrt{3}\sin 7x - \cos 7x = \sqrt{2}$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x - \frac{1}{2}\cos 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin 7x.\cos\frac{\pi}{6} - \cos 7x.\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(7x - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{4}, \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 7x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7} \\ x = \frac{11\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7} \end{array}\right., k \in Z.$$

- Với họ nghiệm $x = \frac{5\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7}$, ta được:

$$\frac{2\pi}{5} < \frac{5\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{5} - \frac{5}{84} < \frac{2k}{7} < \frac{6}{7} - \frac{5}{84} \Rightarrow k = 2$$

Khi đó ta được nghiệm $x_1=\frac{5\pi}{84}+\frac{4\pi}{7}=\frac{53\pi}{84}$.

- Với họ nghiệm $x=\frac{11\pi}{84}+\frac{2k\pi}{7}$, ta được:

$$\frac{2\pi}{5}<\frac{11\pi}{84}+\frac{2k\pi}{7}<\frac{6\pi}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{5}-\frac{11}{84}<\frac{2k}{7}<\frac{6}{7}-\frac{11}{84} \Rightarrow k=1,2$$

Khi đó ta được nghiệm $x_2=\frac{11\pi}{84}+\frac{2\pi}{7}=\frac{35\pi}{84}$ & $x_3=\frac{11\pi}{84}+\frac{4\pi}{7}=\frac{59\pi}{84}$.

Bài 4: Cho phương trình:

$$\sin x+m\cos x=m.$$

a. Giải phương trình với $m=\sqrt{3}$.

b. Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thuộc $(-\pi, \frac{7\pi}{3})$.

BÀI GIẢI

a. *Bạn đọc tự giải.*

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin x=m(1-\cos x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \frac{\sin x}{1-\cos x}=m\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0 \vee x=2\pi\\ \frac{\sin x}{1-\cos x}=m\end{array}\right. \quad (*)$$

Vậy để phương trình ban đầu có 4 nghiệm phân biệt thuộc $(-\pi, \frac{7\pi}{3})$ điều kiện là phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(-\pi, \frac{7\pi}{3})$.

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của đường thẳng y=m với đồ thị hàm số $y=\frac{\sin x}{1-\cos x}$ trên $D=(-\pi, \frac{7\pi}{3})$.

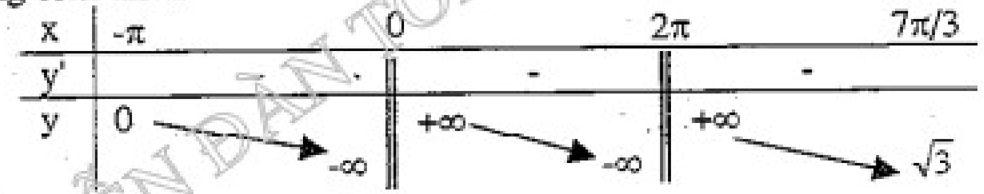
Xét hàm số $y=\frac{\sin x}{1-\cos x}$.

Miền xác định $D=(-\pi, \frac{7\pi}{3})$.

Đạo hàm:

$$y'=\frac{\cos x-1}{(1-\cos x)^2}\le 0, \forall x\in D,$$

Bảng biến thiên:



Khi đó với $m\le 0 \vee m\ge\sqrt{3}$ phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-\pi, \frac{7\pi}{3})$.

Bài 5: (ĐHTCKT TPHCM - 95): Cho phương trình:

$$m.\sin x+(m+1).\cos x+1=0$$

Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1, x_2\in[0, 2\pi]$ và 2 nghiệm này cách nhau $\frac{\pi}{2}$.

BÀI GIẢI

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có nghiệm $x=\alpha\in[0, \frac{3\pi}{2}]$, khi đó $x=\alpha+\frac{\pi}{2}$ cũng là nghiệm, như vậy:

$$\begin{cases}m.\sin\alpha+(m+1).\cos\alpha+1=0\\ m.\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})+(m+1).\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m.\sin\alpha+(m+1).\cos\alpha+1=0\\ m.\cos\alpha-(m+1).\sin\alpha+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m.(\sin\alpha+\cos\alpha)=-1-\cos\alpha\\ m(\cos\alpha-\sin\alpha)=\sin\alpha-1\end{cases} \Rightarrow \frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$$

$$\Leftrightarrow (\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha)=(\cos\alpha-\sin\alpha)((1+\cos\alpha) \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{6} \vee \alpha=\frac{5\pi}{6}.$$

- Với $\alpha=\frac{\pi}{6}$, thay vào phương trình ta được:

$$m.\sin\frac{\pi}{6}+(m+1).\cos\frac{\pi}{6}+1=0 \Leftrightarrow m=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

- Với $\alpha=\frac{5\pi}{6}$, thay vào phương trình ta được:

$$m.\sin\frac{5\pi}{6}+(m+1).\cos\frac{5\pi}{6}+1=0 \Leftrightarrow m=-\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy với $m=-\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ là điều kiện cần.

Điều kiện đủ - Đề nghị bạn đọc tự làm.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a. $\cos^2x-\sqrt{3}\sin 2x=\sin^2x+1$.

b. $3\sin x-\sqrt{3}\cos 3x=4\sin^3x-1$.

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a. $2\cos x(\sin x-1)=\sqrt{3}\cos 2x$.

b. $2\sin 3x-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=0$.

Bài tập 3: Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{3}\sin 4x - \cos 4x = \sin x - \sqrt{3}\cos x$.

b. $3\sin 2x + 4\cos 2x + 5\cos 2003x = 0$.

Bài tập 4: Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{3}\sin(x - \frac{\pi}{3}) + \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 2\sin 1972x = 0$.

b. $\sin x = \frac{1}{3}(3 - \sqrt{3}\cos x)$.

Bài tập 5: Giải các phương trình sau:

a. $(1 - \sqrt{3})\sin x + (1 + \sqrt{3})\cos x = 2$.

b. $\sin 2x + (\sqrt{3} - 2)\cos 2x = 1$.

Bài tập 6: Giải các phương trình sau:

a. $3\cos x - \sin 2x = \sqrt{3}(\cos 2x + \sin x)$.

b. $\sqrt{2}\cos(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}) - \sqrt{6}\sin(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}) = 2\sin(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3}) - 2\sin(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6})$.

Bài tập 7: Cho phương trình:

$$(m-1)\sin x - \cos x = 1.$$

a. Giải phương trình với $m=1$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Bài tập 8: Cho phương trình:

$$m\sin x + 2\cos x = 1 - m.$$

a. Giải phương trình với $m = 2\sqrt{3}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Bài tập 9: Cho phương trình:

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = m.$$

a. Giải phương trình với $m=1$.

b. Biện luận theo m số nghiệm thuộc $(-\frac{5\pi}{6}, 3\pi]$ của phương trình.

Bài tập 10: Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm $x_1, x_2 \in [0, 2\pi]$ và 2 nghiệm này cách nhau $\frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{3}\sin 3x + m\cos 3x = \sqrt{2}.$$

Bài tập 11: Giải và biện luận theo m phương trình:

$$\frac{a - b\cos x}{\sin x} = \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}\,\mathrm{tg}y}{1 + \mathrm{tg}^2 y}.$$

Bài tập 12: Giải và biện luận theo m phương trình:

$$m\sin x + (2m - 1)\cos x = 3m - 1 \text{ với } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

CHỦ ĐỀ 5

PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT BẬC HAI ĐỐI VỚI **sinx** VÀ **cosx**

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Giải phương trình

$$a\sin^2 x + b\sin x.\cos x + c\cos^2 x = d \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

Khi đó phương trình (1) có dạng $a=d$.

- Nếu $a=d$, thì (1) nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.
- Nếu $a \neq d$, thì (1) không nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

Bước 2. Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^2 x \neq 0$, ta được

$$a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}x + c = d(1 + \mathrm{tg}^2 x)$$

Đặt $t = \mathrm{tg}x$, phương trình có dạng:

$$(a-d)t^2 + bt + c - d = 0 \qquad (2)$$

Bước 3. Giải phương trình (2) theo t

Cách 2: Sử dụng các công thức:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ và } \sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

ta được :

$$b.\sin 2x + (c-a)\cos 2x = d - c - a \qquad (3)$$

Đây là phương trình bậc nhất của sin và cos.

Nhận xét quan trọng:

1. Cách 1 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm thuộc tập D với D.
2. Cách 2 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm, vô nghiệm hoặc giải và biện luận phương trình theo tham số.

Chú ý: Nhiều phương trình ở dạng ban đầu không phải là phương trình đẳng cấp bậc hai, khi đó chúng ta cần đánh giá thông qua một hoặc nhiều phép biến đổi lượng giác. Cụ thể chúng ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$2\sqrt{3}\cos^2x+6\sin x.\cos x=3+\sqrt{3}.$$

Giải

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{3}(1+\cos2x)+3\sin2x=3+\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos2x+\sqrt{3}\sin2x=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(2x-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ 2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{12}+k\pi \end{array}\right., k\in Z$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Xét hai trường hợp

- Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

  Khi đó phương trình có dạng

  $0=3+\sqrt{3}$ mâu thuẫn

  Vậy phương trình không nhận $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x\neq0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

  Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2x\neq0$, ta được

$$2\sqrt{3}+6tgx=(3+\sqrt{3})(1+tg^2x) \Leftrightarrow (3+\sqrt{3})tg^2x-6tgx+3-\sqrt{3}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=1 \\ tgx=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=tg\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\alpha+k\pi \end{array}\right., k\in Z$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$m.\sin^2x-3\sin x.\cos x-m-1=0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=1.

b. Tìm m để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $(0, \frac{3\pi}{2})$.

Giải

Xét hai trường hợp

- Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

  Khi đó phương trình có dạng

  $-1=0$ mâu thuẫn

  Vậy phương trình không nhận $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x\neq0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

  Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2x\neq0$, ta được

$$m.tg^2x-3tgx-(m+1)(1+tg^2x)=0 \Leftrightarrow tg^2x+3tgx+m+1=0.$$

Đặt t=tgx, phương trình có dạng:

$$f(t)=t^2+3t+m+1=0 \qquad (2)$$

a. Với m=1, ta được:

$$t^2+3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=-1 \\ tgx=-2=tg\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\alpha+k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy với m=1 phương trình có hai họ nghiệm.

b. Để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $(0, \frac{3\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt thoả mãn $t_1<0<t_2$

$\Leftrightarrow af(0)<0 \Leftrightarrow m+1<0 \Leftrightarrow m<-1$.

Vậy m<-1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 3: (ĐHTS - 2000): Cho phương trình:

$$2\sin^2x+\sin x.\cos x-\cos^2x+m=0 \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=1.

b. Giải và biện luận phương trình theo m.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2.\frac{1-\cos2x}{2}+\frac{1}{2}\sin2x-\frac{1+\cos2x}{2}=-m$$

$$\Leftrightarrow \sin2x-3\cos2x=-2m-1. \qquad (2)$$

a. Với m=1, ta được:

$$\sin2x-3\cos2x=-3$$

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\sin 2x-\frac{3}{\sqrt{10}}\cos 2x=-\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Đặt $\frac{1}{\sqrt{10}}=\cos\alpha$ thì $\frac{3}{\sqrt{10}}=\sin\alpha$, khi đó ta được:

$$\sin 2x.\cos\alpha-\cos 2x.\sin\alpha=-\sin\alpha \Leftrightarrow \sin(2x-\alpha)=\sin(-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-\alpha=-\alpha+2k\pi\\ 2x-\alpha=\pi+\alpha+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+\alpha+k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 2x=3(1-\cos 2x) \Leftrightarrow 2\sin x.\cos x=6\sin^2 x \Leftrightarrow (\cos x-3\sin x).\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-3\sin x-0\\ \sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot gx=3=\cot g\alpha\\ \sin x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\alpha+k\pi\\ x=k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\sin 2x-\frac{3}{\sqrt{10}}\cos 2x=\frac{-2m-1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \sin(2x-\alpha)=\frac{-2m-1}{\sqrt{10}}$$

- Nếu $\left|\frac{-2m-1}{\sqrt{10}}\right|>1 \Leftrightarrow m>\frac{-1+\sqrt{10}}{2} \vee m<\frac{-1-\sqrt{10}}{2}$.

phương trình vô nghiệm.

- Nếu $\left|\frac{-2m-1}{\sqrt{10}}\right|\le 1 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{10}}{2}\le m\le\frac{-1+\sqrt{10}}{2}$, đặt $\frac{-2m-1}{\sqrt{10}}=\sin\beta$

ta được:

$$\sin(2x-\alpha)=\sin\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-\alpha=\beta+2k\pi\\ 2x-\alpha=\pi-\beta+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\alpha+\beta}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi+\alpha-\beta}{2}+k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Chú ý: Nhiều phương trình ở dạng ban đầu chưa phải là phương trình đẳng cấp bậc hai, khi đó ta các em học sinh cần biết đánh giá hoặc thực hiện một vài phép biến đổi lượng giác.

Ví dụ 4: Cho phương trình:

$$m.\sin x+\cos x=\frac{1}{\cos x}, m\neq 0. \qquad (1)$$

a. (ĐHAN - 98): Giải phương trình khi $m=\sqrt{3}$.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm

c. Giả sử m là giá trị làm cho phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn: $x_1+x_2\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$. Tính $\cos 2(x_1+x_2)$ theo m.

Giải

Điều kiện:

$$\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z.$$

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$m\sin x.\cos x+\cos^2 x=1 \Leftrightarrow m\sin x.\cos x=\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ m.\cos x=\sin x\end{array}\right. \overset{\cos x\neq 0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ tgx=m\end{array}\right.. \qquad (I)$$

b. Với $m=\sqrt{3}$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ tgx=\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right., k\in Z$$

Vậy với $m=\sqrt{3}$ phương trình có hai họ nghiệm.

c. Từ (I) ta có ngay nhận xét phương trình (1) có nghiệm với mọi m.

d. Vì $x_1+x_2\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, do đó có thể coi:

- x_1 là nghiệm của phương trình $\sin x=0 \Rightarrow tgx_1=0$.
- x_2 là nghiệm của phương trình $tgx=m \Rightarrow tgx_2=m$.

suy ra:

$$\cos 2(x_1+x_2)=\cos 2x_1.\cos 2x_2-\sin 2x_1.\sin 2x_2$$

$$=\frac{1-tg^2x_1}{1+tg^2x_1}.\frac{1-tg^2x_2}{1+tg^2x_2}-\frac{2tgx_1}{1+tg^2x_1}.\frac{2tgx_2}{1+tg^2x_2}=\frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

Cách 2: Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos x\neq 0$, ta được

$$mtgx+1=1+tg^2x \Leftrightarrow tg^2x-mtgx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tgx=0\\ tgx=m\end{array}\right.. \qquad (II)$$

a. Với m=$\sqrt{3}$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = 0 \\ tgx = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy với m=$\sqrt{3}$ phương trình có hai họ nghiệm.

b. Từ (I) ta có ngay nhận xét phương trình (1) có nghiệm với mọi m.

c. Vì $x_1+x_2 \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, do đó có thể coi:

- x_1 là nghiệm của phương trình tgx=0 $\Rightarrow$ $tgx_1=0$.
- x_2 là nghiệm của phương trình tgx=m $\Rightarrow$ $tgx_2=m$.

suy ra:

$$\cos2(x_1+x_2)=\frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (ĐHKTCN TPHCM - 98): Cho phương trình:

$$\sin^2x+2(m-1)\sin x.\cos x-(m+1)\cos^2x=m \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=-2.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1-\cos2x}{2}+(m-1)\sin2x-(m+1).\frac{1+\cos2x}{2}=m$$

$$\Leftrightarrow 2(m-1)\sin2x-(m+2)\cos2x=3m. \qquad (2)$$

a. Với m=-2, ta được:

$$\sin2x=1 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy với m=-2 phương trình có một họ nghiệm.

b. Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm

$$\Leftrightarrow a^2+b^2\geq c^2 \Leftrightarrow 4(m-1)^2+(m+2)^2\geq 9m^2 \Leftrightarrow m^2+m-2\leq 0 \Leftrightarrow -2\leq m\leq 1.$$

Vậy với -2≤m≤1 phương trình có nghiệm.

Bài 2: (ĐHGTVT - 99): Tìm m để phương trình sau có nghiệm $x\in(0, \frac{\pi}{4})$:

$$m.\cos^2x-4\sin x.\cos x+m-2=0. \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Với $x\in(0, \frac{\pi}{4})$ $\Rightarrow$ cosx≠0, chia hai vế của phương trình cho $\cos^2x\neq0$, được:

$$m-4tgx+(m-2)(1+tg^2x)=0 \Leftrightarrow (m-2)tg^2x-4tgx+2m-2=0. \qquad (2)$$

Đặt t=tgx, vì $x\in(0, \frac{\pi}{4})$ nên $t\in(0, 1)$, ta được:

$$(m-2)t^2-4t+2m-2=0. \qquad (3)$$

Khi đó (1) có nghiệm $x\in(0, \frac{\pi}{4})$ $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $t\in(0, 1)$.

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đại số

- Với m-2=0 $\Leftrightarrow$ m=2, khi đó (3) có dạng:

$$-4t+2=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\in(0, 1)$$

Vậy m=2 thoả mãn điều kiện đầu bài

- Với m-2≠0 $\Leftrightarrow$ m≠2, khi đó (3) có nghiệm $t\in(0, 1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(3) có 1 nghiệm thuộc (0,1)} \\ \text{(3) có 2 nghiệm thuộc (0,1)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1).f(0)<0 \\ \left\{\begin{array}{l} \Delta'\geq 0 \\ af(1)>0 \\ af(0)>0 \\ 0<\frac{S}{2}<1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (3m-8)(2m-2)<0 \\ \left\{\begin{array}{l} -2m^2+6m\geq 0 \\ (m-2)(3m-8)>0 \\ (m-2)(2m-2)>0 \\ 0<\frac{2}{m-2}<1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow 1<m<\frac{8}{3}.$$

Vậy với $1<m<\frac{8}{3}$ phương trình có nghiệm $x\in(0, \frac{\pi}{4})$.

Cách 2: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\frac{2t^2+4t+2}{t^2+2}=m$$

Phương trình (1) có nghiệm $x\in(0, \frac{\pi}{4})$

$\Leftrightarrow$ đường thẳng y=m cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2t^2+4t+2}{t^2+2}$ trên (0, 1).

Xét hàm số (C) $y=\frac{2t^2+4t+2}{t^2+2}$ trên khoảng (0, 1).

Đạo hàm

$$y'=\frac{-4t^2+4t+8}{(t^2+2)^2}=\frac{-4(t+1)(t-2)}{(t^2+2)^2}>0 \text{ với } \forall t\in(0, 1)$$

tức là hàm số đồng biến trên (0, 1).

Do đó đường thẳng y=m cắt đồ thị hàm số (C) trên khoảng (0, 1)

$$\Leftrightarrow y(0)<m<y(1) \Leftrightarrow 1<m<\frac{8}{3}.$$

Vậy với $1<m<\frac{8}{3}$ phương trình có nghiệm $x\in(0, \frac{\pi}{4})$.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình:

a. $4\sin^2x+3\sqrt{3}\sin2x-2\cos^2x=4$.

b. $2\sin^2x+3\cos^2x=5\sin x.\cos x$.

Bài tập 2. Giải các phương trình:

a. $\sin^2x-3\sin x.\cos x=1$.

b. $4\sin x+6\cos x=\frac{1}{\cos x}$.

Bài tập 3. Cho phương trình:

$$3\sin^2x+m.\sin2x+4\cos^2x=0.$$

a. Giải phương trình khi m= 4.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm

Bài tập 4. Cho phương trình:

$$(m+1)\sin^2x-2\sin x.\cos x+\cos2x=0.$$

a. Giải phương trình khi m= 0.

b. Xác định m để phương trình đúng hai nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$.

Bài tập 5. Cho phương trình:

$$2\sin^2x+(5m-2)\sin2x-3(m+1)\cos^2x=3m.$$

a. Giải phương trình khi $m=\frac{2}{3}$.

b. Xác định m để phương trình đúng ba nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Bài tập 6. Cho phương trình:

$$m\sin x+(m+1)\cos x=\frac{m}{\cos x}.$$

a. Giải phương trình khi $m = \frac{1}{2}$.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm

c. Giả sử m là giá trị làm cho phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn: $x_1+x_2\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$. Tính $\cos2(x_1+x_2)$ theo m.

Bài tập 7. Giải và biện luận phương trình:

$$\cos^2x+8\sin x.\cos x+7\sin^2x = m$$

Bài tập 8. Giải và biện luận phương trình:

$$(m^2+2)\cos^2x -2m.\sin2x + 1 = 0$$

CHỦ ĐỀ 6

PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT BẬC BA ĐỐI VỚI sinx VÀ cosx

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Giải phương trình

$$a.\sin^3x+b.\sin^2x.\cos x+c.\sin x.\cos^2x+d.\cos^3x=0 \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

Khi đó phương trình (1) có dạng a=0.

- Nếu a=0, thì (1) nhận $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ làm nghiệm.
- Nếu a≠0, thì (1) không nhận $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ làm nghiệm.

Bước 2. Với $\cos x\neq0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3x\neq0$, ta được

$$a.tg^3x+b.tg^2x+c.tgx+d=0$$

Đặt t=tgx, phương trình có dạng:

$$a.t^3+b.t^2+c.t+d=0 \qquad (2)$$

Bước 3. Giải phương trình (2) theo t

Mở rộng: Phương pháp giải trên được mở rộng cho phương trình đẳng cấp bậc n đối với sin và cos, đó là phương trình có dạng:

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\sin^{n-k}x.\cos^kx=0.$$

Tuy nhiên để linh hoạt, các em học sinh cần nhớ rằng vì $\sin^2x+\cos^2x=1$ nên với các nhân tử có bậc k cũng được coi là có bậc k+2l, do vậy chúng ta có dạng mở rộng của phương trình thuần nhất bậc ba như sau:

$$a.\sin^3x+b.\sin^2x.\cos x+c.\sin x.\cos^2x+d.\cos^3x+(e.\sin x+f.\cos x)=0$$

Ví dụ 1: (ĐHNT - 96): Giải phương trình sau:

$$4\sin^3x+3\sin^2x.\cos x-\sin x-\cos^3x=0$$

Giải

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

Khi đó phương trình có dạng

$$4\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=0 \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy phương trình không nhận $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ (k\in Z)$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3x\neq 0$, ta được

$$4tg^3x+3tg^2x-(1+tg^2x).tgx-1=0 \Leftrightarrow 3tg^3x+3tg^2x-tgx-1=0$$

Đặt t=tgx, phương trình có dạng:

$$3t^3+3t^2-t-1=0 \Leftrightarrow (t+1)(3t^2-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1/\sqrt{3} \\ t=-1/\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=-1 \\ tgx=1/\sqrt{3} \\ tgx=-1/\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình sau:

$$\sin^4x-3\sin^2x.\cos^2x-4\sin x.\cos^3x-3\cos^4x=0$$

Giải

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.

Khi đó phương trình có dạng

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=0 \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy phương trình không nhận $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^4x\neq 0$, ta được

$$tg^4x-3tg^2x-4tgx-3=0$$

Đặt t=tgx, phương trình có dạng:

$$t^4-3t^2-4t-3=0 \Leftrightarrow (t^4-2t^2+1)-(t^2+4t+4)=0 \Leftrightarrow (t^2-t-3)(t^2+t+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2-t-3=0 \\ t^2+t+1=0\ \ (vn) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=\frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ t_2=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=\frac{1-\sqrt{13}}{2}=tg\alpha \\ tgx=\frac{1+\sqrt{13}}{2}=tg\beta \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k\pi \\ x=\beta+k\pi \end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Chú ý: Tồn tại những phương trình ở dạng ban đầu chưa phải là phương trình thuần nhất, khi đó cần thực hiện một vài phép biến đổi lượng giác thích hợp.

Ví dụ 3: (ĐHNN I Khối B - 99): Giải phương trình sau:

$$(tgx+1)\sin^2x=3(\cos x-\sin x)\sin x+3$$

Giải

Điều kiện $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^2x\neq 0$, ta được

$$(tgx+1)tg^2x=3(1-tgx)tgx+3(1+tg^2x) \Leftrightarrow tg^3x+tg^2x-3tgx-3=0$$

Đặt t=tgx, phương trình có dạng:

$$t^3+t^2-3t-3=0 \Leftrightarrow (t+1)(t^2-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\sqrt{3} \\ t=-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=-1 \\ tgx=\sqrt{3} \\ tgx=-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 4: (ĐHQG TPHCM - 98): Giải phương trình sau:

$$\sin^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sqrt{2}\sin^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=4\sin x \Leftrightarrow \left[\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^3=4\sin x \Leftrightarrow (\sin x-\cos x)^3=4\sin x$$

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.

Khi đó phương trình có dạng

$$\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy phương trình không nhận $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ (k\in Z)$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3x\neq 0$, ta được

$$(tgx-1)^3=4(1+tg^2x)tgx \Leftrightarrow 3tg^3x+3tg^2x+tgx-1=0$$

Đặt t=tgx, phương trình có dạng:

$$3t^3+3t^2+t-1=0 \Leftrightarrow (t+1)(3t^2+1)=0 \Leftrightarrow t=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Chú ý: Các em học sinh cũng cần nhớ rằng ngoài phương pháp chính quy để giải mọi phương trình đẳng cấp bậc 3 thì trong một vài trường hợp riêng biệt cũng có thể giải nó bằng phương pháp phân tích thành phương trình tích. Cụ thể ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 5: (ĐHTS - 96): Giải phương trình sau:

$$\cos^3x+\sin^3x=\sin x-\cos x. \qquad (1)$$

Giải

Cách 1: Sử dụng phương pháp giải phương trình đẳng cấp bậc 3

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.

  Khi đó phương trình có dạng

  $$\pm1=\pm1$$

Vậy phương trình nhận $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x\neq0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.

  Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3x\neq0$, ta được

  $$1+tg^3x=(1+tg^2x)tgx-(1+tg^2x) \Leftrightarrow tg^2x-tgx+2=0 \text{ vô nghiệm}$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Cách 2: Sử dụng phương pháp phân tích

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos^3x+\sin^3x=(\sin x-\cos x)(\cos^2x+\sin^2x)$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^3x+\cos x.\sin^2x-\sin x.\cos^2x=0$$
$$\Leftrightarrow (2\cos^2x+\sin^2x-\sin x.\cos x)\cos x=0 \Leftrightarrow (1+\cos^2x-\sin x.\cos x)\cos x=0$$
$$\Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 6: Giải phương trình:

$$\frac{1-tgx}{1+tgx}=1+\sin2x.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x\neq0\\ tgx\neq-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{cases},\ k\in Z. \qquad (I)$$

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=(\cos x+\sin x)^2 \Leftrightarrow \cos x-\sin x=(\cos x+\sin x)^3$$

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3x\neq0$, ta được

$$1+tg^2x-(1+tg^2x)tgx=(1+tgx)^3 \Leftrightarrow tg^3x+tg^2x+2tgx=0$$
$$\Leftrightarrow (tg^2x+tgx+2)tgx=0 \Leftrightarrow tgx=0 \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=(\cos x+\sin x)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}=2\sin^2(x+\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow cotg(x+\frac{\pi}{4})=\frac{2}{1+cotg^2(x+\frac{\pi}{4})}$$

Đặt $t=cotg(x+\frac{\pi}{4})$, ta được:

$$t=\frac{2}{1+t^2} \Leftrightarrow t^3+t-2=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+2)=0 \Leftrightarrow t=1$$
$$\Leftrightarrow cotg(x+\frac{\pi}{4})=1 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 7: Giải phương trình sau:

$$(\sin x-2\cos x)^4+(\sin x-2\cos x)(5-7sim2x+7\cos^2x)\cos x+\cos^4x=0$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin x-2\cos x)^4+(\sin x-2\cos x)(5\sin^2x-14simx.\cos x+13\cos^2x)\cos x+\cos^4x=0$$

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.

  Khi đó phương trình có dạng

  $\sin^4(\frac{\pi}{2}+k\pi)=0$ mâu thuẫn.

Vậy phương trình không nhận $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x\neq0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.

  Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^4x\neq0$, ta được

  $$(tgx-2)^4+(tgx-2)(5tg^2x-14tgx+13)+1=0$$

  Đặt $t=tgx$, phương trình có dạng:

  $$(t-2)^4+(t-2)(5t^2-14t+13)+1=0 \qquad (1)$$

Nhận xét rằng đây không phải là một phương trình hồi quy, tuy nhiên nếu đặt ẩn phụ thích hợp ta sẽ có một phương trình hồi quy.

Thật vậy, đặt $y=t-2$.

$$(1) \Leftrightarrow y^4+y[5(y+2)^2-14(y+2)+13]+1=0$$
$$\Leftrightarrow y^4+5y^3+6y^2+5y+1=0. \qquad (2)$$

Nhận xét rằng $y=0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $y^2\neq0$, ta được phương trình tương đương:

$$(y^2+\frac{1}{y^2})+5(y+\frac{1}{y})+6=0$$

Đặt $u=y+\frac{1}{y}$, điều kiện $|u|\geq 2$, suy ra $y^2+\frac{1}{y^2}=u^2-2$.

Khi đó phương trình trên có dạng:

$$u^2+5u+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=-1 \quad (1) \\ u=-4 \end{array}\right.$$

- Với u=-4, ta được:

$$y+\frac{1}{y}=-4 \Leftrightarrow y^2+4y+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1=-2-\sqrt{3} \\ y_2=-2+\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-\sqrt{3} \\ t_2=\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=-\sqrt{3} \\ tgx=\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 8: Cho phương trình:

$$2(m-2)\sin^3x-(5m-2)\sin^2x.\cos x+2\sin x.\cos^2x-(m+1)\cos^3x=0 \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=3.

b. Xác định m để phương trình có đúng một nghiệm $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Giải.

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.

  Khi đó phương trình có dạng

  $$2(m-2)\sin^3(\frac{\pi}{2}+k\pi)=0 \Leftrightarrow m=2$$

- Với $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.

  Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3x\neq 0$, ta được

  $$2(m-2)tg^3x-(5m-2)tg^2x+2tgx-m-1=0$$

  Đặt t=tgx, phương trình có dạng:

  $$2(m-2)t^3-(5m-2)t^2+2t-m-1=0 \Leftrightarrow (2t-1)[(m-2)t^2-2mt+m+1]=0$$

  $$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t-1=0 \\ g(t)=(m-2)t^2-2mt+m+1=0 \quad (2) \end{array}\right. \qquad (I)$$

a. Với m=3:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t-1=0 \\ t^2-6t+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2} \\ t=3-\sqrt{5} \\ t=3+\sqrt{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=\frac{1}{2}=tg\alpha \\ tgx=3-\sqrt{5}=tg\beta \\ tgx=3+\sqrt{5}=tg\gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k\pi \\ x=\beta+k\pi \\ x=\gamma+k\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

b. Để phương trình có đúng một nghiệm $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ (I) có duy nhất nghiệm $t=\frac{1}{2}$.

Trường hợp 1: Nếu $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$

Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow -4t+3=0 \Leftrightarrow t=\frac{3}{4}\neq\frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow$ m=2 không thoả mãn.

Trường hợp 2: Nếu $m-2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 2$

Khi đó điều kiện

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'_g<0 \\ \begin{cases} \Delta'_g=0 \\ g(\frac{1}{2})=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2<0 \\ \begin{cases} m+2=0 \\ m+2=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m\leq -2.$$

Vậy với $m\leq -2$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 9: Cho phương trình:

$$\sin^3x-3m.\sin^2x.\cos x+3(m^2-1)\sin x.\cos^2x-(m^2-1)\cos^3x=0 \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=1.

b. Xác định m để phương trình có đúng ba nghiệm $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

Giải.

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.

  Khi đó phương trình có dạng

  $\sin^3(\frac{\pi}{2}+k\pi)=0$ mâu thuẫn.

- Với $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.

  Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3x\neq 0$, ta được

  $$tg^3x-3mtg^2x+3(m^2-1)tgx-m^2+1=0$$

  Đặt t=tgx, phương trình có dạng:

  $$t^3-3mt^2+3(m^2-1)t-m^2+1=0 \qquad (2)$$

a. Với m=1:

$$(2) \Leftrightarrow t^3-3t^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=0 \\ tgx=3=tg\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\alpha+k\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

b. Để phương trình có đúng ba nghiệm $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ (2) có ba nghiệm phân biệt dương

Xét hàm số $y=t^3-3mt^2+3(m^2-1)t-m^2+1$.

Ta có:

$$y'=3t^2-6mt+3(m^2-1),$$

$$y'=0 \Leftrightarrow 3t^2-6mt+3(m^2-1)=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0. \qquad (3)$$

Ta có:

$$\Delta' =m^2- m^2+1=1>0,\ \forall m$$

Khi đó (3) luôn có 2 nghiệm phân biệt $t_1=m-1$ & $t_2=m+1$ với $\forall m$.

- Trước hết điều kiện để đồ thị hàm số cắt Ot tại ba điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow \text{hàm số có cực đại, cực tiểu và } y_{CĐ}.y_{CT}<0 \Leftrightarrow y(t_1)y(t_2)<0. \qquad (4)$$

Khi đó để giải bất phương trình (4) trước hết đi tính $y(t_1)$, $y(t_2)$ bằng cách:

- Thực hiện phép chia y cho y' ta được:

$$y=\frac{1}{3}y'(t-m)t-2t+m^3-m^2-m+1.$$

- Khi đó:

$$y(t_1)=(m-1)(m^2-3) \ \&\ y(t_2)=(m+1)(m^2-2m-1).$$

Suy ra

$$(4) \Leftrightarrow (m-1)(m^2-3)(m+1)(m^2-2m-1)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{3}<m<-1 \\ 1-\sqrt{2}<m<1 \\ \sqrt{3}<m<1+\sqrt{2} \end{array}\right. . \qquad (I)$$

- Đồ thị hàm số cắt Ot tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương là:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1>0 \\ t_2>0 \\ y(0)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ m+1>0 \\ -(m^2-1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow m>1 \qquad (II)$$

Kết hợp (I) và (II) được $\sqrt{3}<m<1+\sqrt{2}$.

Vậy, với $\sqrt{3}<m<1+\sqrt{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 10: Cho phương trình:

$$m\cos^4x+\cos2x(\sin x+3\cos x)(\sin x+5\cos x)=0 \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=9.

b. Xác định m để phương trình có đúng bốn nghiệm $x\in(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Giải.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$m\cos^4x-(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)(\sin x+3\cos x)(\sin x+5\cos x)=0 \qquad (2)$$

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.

  Khi đó phương trình có dạng

$$-\sin^4(\frac{\pi}{2}+k\pi)=0 \text{ mâu thuẫn.}$$

- Với $\cos x\neq0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z)$

  Chia hai vế của phương trình (2) cho $\cos^4x\neq0$, ta được

$$m-(tgx-1)(tgx+1)(tgx+3)(tgx+5)=0$$

Đặt u=tgx, phương trình có dạng:

$$m-(u-1)(u+1)(u+3)(u+5)=0 \Leftrightarrow (u^2+4u-5)(u^2+4u+3)=m.$$

Đặt $t=u^2+4u-5$, điều kiện $u\geq-9$.

Suy ra $u^2+4u+3=t+8$. Khi đó phương trình trên có dạng:

$$t(t+8)=m \Leftrightarrow f(t)=t^2+8t-m=0. \qquad (3)$$

a. Với m=9

$$(3) \Leftrightarrow t^2+8t-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u^2+4u-5=1 \\ u^2+4u-5=-9 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2-\sqrt{8} \\ u=2+\sqrt{8} \\ u=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=2-\sqrt{8}=tg\alpha \\ tgx=2+\sqrt{8}=tg\beta \\ tgx=2=tg\gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k\pi \\ x=\beta+k\pi \\ x=\gamma+k\pi \end{array}\right. ,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

b. Phương trình (1) có 4 nghiệm $x\in(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $-9<t_1<t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ f(-9)>0 \\ S/2>-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16+m>0 \\ 9-m>0 \\ -4>-9 \end{cases} \Leftrightarrow -16<m<9.$$

Vậy, với -16<m<9 phương trình có bốn nghiệm phân biệt $x\in(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (HVKTQS - 96): Giải phương trình sau:

$$\sin3x=2\cos^3x$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3\sin x-4\sin^3x=2\cos^3x \Leftrightarrow 4\sin^3x-3\sin x+2\cos^3x=0. \qquad (1)$$

Bạn đọc tự giải tiếp.

Bài 2: (ĐHQG - 96): Giải phương trình sau:

$$1+3\sin2x=2tgx$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\cos x\neq0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos x+6\sin x.\cos^2x=2\sin x.$$

Bạn đọc tự giải tiếp.

Bài 3: (ĐHQG - 98): Giải phương trình sau:

$$8\cos^3(x+\frac{\pi}{3})=\cos 3x$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$8(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^3=4\cos^3x-3\cos x$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sqrt{3}\sin x)^3=4\cos^3x-3\cos x. \qquad (1)$$

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

  Khi đó phương trình có dạng

  $$[-\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{2}+k\pi)]^3=0 \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy phương trình không nhận $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

  Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3x\neq 0$, ta được

  $$[1-\sqrt{3}(1+tg^2x)tgx]^3=4-3(1+tg^2x)$$

  $$\Leftrightarrow \sqrt{3}tg^3x-4tg^2x+\sqrt{3}tgx=0$$

  Đặt t=tgx, phương trình có dạng:

  $$\sqrt{3}t^3-4t^2+\sqrt{3}t=0 \Leftrightarrow t(\sqrt{3}t^2-4t+\sqrt{3})=0$$

  $$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\sqrt{3} \\ t=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=0 \\ tgx=\sqrt{3} \\ tgx=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Bài 4: Cho phương trình:

$$m\sin^3x+(3m-4)\sin^2x.\cos x+(3m-7)\sin x.\cos^2x+(m-3)\cos^3x=0 \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=3.

b. Xác định m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-\frac{\pi}{2}, 0]$

BÀI GIẢI

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$, ta được

  $$m\sin^3(\frac{\pi}{2}+k\pi)=0 \Leftrightarrow m=0$$

- Với $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

  Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3x\neq 0$, ta được

  $$m.tg^3x+(3m-4)tg^2x+(3m-7)tgx+m-3=0$$

  Đặt t=tgx, phương trình có dạng:

  $$mt^3+(3m-4)t^2+(3m-7)t+m-3=0 \Leftrightarrow (t+1)[mt^2+2(m-2)t+m-3]=0$$

  $$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+1=0 \\ g(t)=mt^2+2(m-2)t+m-3=0 \ (2) \end{array}\right. \qquad (I)$$

a. Với m=3:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+1=0 \\ 3t^2+2t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=0 \\ t=-2/3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=-1 \\ tgx=0 \\ tgx=-2/3=tg\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=k\pi \\ x=\alpha+k\pi \end{array}\right.$$

Vậy, với m=3 phương trình có ba họ nghiệm.

b. Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-\frac{\pi}{2}, 0]$

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt không dương ($t_1<t_2\le 0$) khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'_g>0 \\ ag(0)\ge 0 \\ \frac{S}{2}<0 \\ g(-1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 4-m>0 \\ m(m-3)\ge 0 \\ -\frac{m-2}{m}<0 \\ 1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3\le m<4.$$

Vậy với $m\in[3, 4)$ phương trình có ba nghiệm phân biệt không dương.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

a. (ĐH Đà Nẵng - 99): $\cos^3x-\sin^3x=\cos x-\sin x$.

b. $4\sin^3x-10\sin^2x.\cos x+6\sin x.\cos^2x-\cos^3x=0$.

c. (ĐHL - 96): $4\sin^3x-\sin^2x.\cos x-3\sin x+3\cos^3x=0$.

d. $2\sin^3x-3\sin x+4\cos^3x=0$.

Bài tập 2. Giải các phương trình sau:

a. $\sin^3x-5\sin^2x.\cos x+7\sin x.\cos^2x-2\cos^3x=0$.

b. $\sin 2x.\sin x+\sin 3x=6\cos^3x$.

c. $8\cos x=\frac{\sqrt{3}}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$.

d. (PVBC & TT - 98): $\sqrt{2}\sin^3(x+\frac{\pi}{4})=2\sin x$.

Bài tập 3. Giải các phương trình sau:

a. $5(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x)$

b. $\sin^3 x - 5\sin^2 x.\cos x - 3\sin x.\cos^2 x + 3\cos^3 x = 0$

Bài tập 4. Giải các phương trình sau:

a. $\sin^3 x - 3\sin x.\cos^2 x - \cos^3 x = 0.$

b. $\sin^3 x + \sin x.\cos^2 x - \cos^3 x = 0.$

Bài tập 5. Giải các phương trình sau:

a. (HVNH TPHCM - 2000): $\sin 3x + \cos 3x + 2\cos x = 0.$

b. (ĐHY Hà Nội - 99): $4\sin^3 x - \sin x - \cos x = 0.$

Bài tập 6. Giải các phương trình sau:

a. (ĐH Đà Nẵng - 99): $\cos^3 x - \sin^3 x = \sin x - \cos x.$

b. $\sin^3 x - 3\sin^2 x.\cos x + 2\sin x.\cos^2 x - \cos^3 x = 0.$

c. $(\sin^2 x - 4\cos^2 x)(\sin^2 x - 2\sin x.\cos x) = 2\cos^4 x$

Bài tập 7. Tìm tất cả các nghiệm $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ của các phương trình:

a. $\sin x.(2\sin^2 x - \cos^2 x)(8\sin^4 x - 8\sin^2 x.\cos^2 x + \cos^4 x) = 0.$

b. $64\sin^6 x - 96\sin^4 x.\cos^2 x + 36\sin^2 x.\cos^4 x - 3\cos^6 x = 0.$

Bài tập 8. Cho phương trình :

$$\sin^3 x - 3(m+1)\sin^2 x.\cos x + 2(m^2+4m+1)\sin x.\cos^2 x - 4m(m+1).\cos^3 x = 0.$$

a. Giải phương trình với $m=-1$.

b. Xác định m để phương trình có ba nghiệm phân biệt thuộc $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

Bài tập 9. Cho phương trình :

$$\sin^3 x - 3\sin^2 x.\cos x + 2(m-1)\sin x.\cos^2 x + (m-3)\cos^3 x = 0.$$

a. Giải phương trình với $m=1$.

b. Xác định m để phương trình có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thoả mãn $-\frac{\pi}{2} < x_1 < -\frac{\pi}{4} < x_2 < x_3 < \frac{\pi}{2}$

Bài tập 10. Cho phương trình :

$$2(2-3m)\sin^3 x + 3(2m-1)\sin x + 2(m-2)\sin^2 x.\cos x - (4m-3)\cos x = 0$$

a. Giải phương trình khi $m = 2$

b. Tìm m để $[0, \frac{\pi}{4}]$ chứa đúng 1 nghiệm của phương trình.

Bài tập 11. Xác định $m \neq 0$ để phương trình:

$$m^2\sin^3 x - 3m.\sin^2 x.\cos x + (m^2+2)\sin x.\cos^2 x - m.\cos^3 x = 0$$

có đúng ba nghiệm $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Bài tập 12. Giải và biện luận phương trình:

$$(8a^2+1)\sin^3 x - (4a^2+1)\sin x + 2\cos^3 x = 0.$$

CHỦ ĐỀ 7

PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI sinx VÀ cosx

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Giải phương trình :

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x.\cos x + c = 0 \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1. Đặt $\sin x + \cos x = t$, đk $|t| \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$at + b\frac{t^2-1}{2} + c = 0 \Leftrightarrow bt^2 + 2at + 2c - b = 0 \qquad (2)$$

Bước 2. Giải (2) theo t và chọn nghiệm t_0 thoả mãn điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$

Với $t = t_0$, ta được:

$$\sin x + \cos x = t_0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = t_0 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{t_0}{\sqrt{2}}.$$

Đây là phương trình cơ bản của sin.

Chú ý : Ta có thể giải (1) bằng cách đặt ẩn phụ $z = \frac{\pi}{4} - x$, khi đó ta có:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \sqrt{2}\cos z$$

$$\sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\sin 2(\frac{\pi}{4} - z) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2} - 2z) = \frac{1}{2}\cos 2z = \frac{1}{2}(2\cos^2 z - 1)$$

Vậy ta chuyển phương trình ban đầu về dạng phương trình bậc 2 đối với cosz.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\sin x + \cos x - 2\sin x\cos x + 1 = 0.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đặt $\sin x + \cos x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t - (t^2-1) + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \ (l) \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x + \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Đặt $z=\frac{\pi}{4}-x$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-x)-\sin 2x+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z-\sin 2(\frac{\pi}{4}-z)+1=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z-\sin(\frac{\pi}{2}-2z)+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z-\cos 2z+1=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z-(2\cos^2 z-1)+1=0 \Leftrightarrow -2\cos^2 z+\sqrt{2}\cos z+2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos z=\sqrt{2} \text{ (loại)} \\ \cos z=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi \\ z=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4}-x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi \\ \frac{\pi}{4}-x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{2}-2k\pi \\ x=\pi-2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Chú ý: Tồn tại những phương trình ở dạng ban đầu chưa phải là phương trình đối xứng, khi đó cần thực hiện một vài phép biến đổi lượng giác thích hợp.

Ví dụ 2: (ĐHMĐC - 99): Giải phương trình:

$$1+\text{tg}x=2\sqrt{2}\sin x.$$

Giải

Điều kiện

$$\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, (k\in Z).$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$1+\frac{\sin x}{\cos x}=2\sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow \sin x+\cos x=2\sqrt{2}\sin x.\cos x$$

Đặt $\sin x+\cos x=t$, điều kiện $|t|\leq\sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t=\sqrt{2}(t^2-1) \Leftrightarrow \sqrt{2}t^2-t-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ t=\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x+\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x+\cos x=\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2} \\ \sin(x+\frac{\pi}{4})=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{6}+2k\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{5\pi}{12}+2k\pi \\ x=\frac{11\pi}{12}+2k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right., (k\in Z).$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 3: Cho phương trình

$$m(\sin x+\cos x)+\sin 2x+m-1=0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=2.
b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Đặt $\sin x+\cos x=t$, đk $|t|\leq\sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$mt+(t^2-1)+m-1=0 \Leftrightarrow f(t)=t^2+mt+m-2=0 \qquad (2)$$

a. Với m=2 phương trình (2) có dạng:

$$t^2+2t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-2 \text{ (l)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x+\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, (k\in Z).$$

Vậy, với m=2 phương trình có một họ nghiệm.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm thoả mãn $|t|\leq\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(2) có 1 nghiệm thuộc } [-\sqrt{2},\sqrt{2}] \\ \text{(2) có 2 nghiệm thuộc } [-\sqrt{2},\sqrt{2}] \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-\sqrt{2}).f(\sqrt{2})\leq 0 \\ \left\{\begin{array}{l} \Delta\geq 0 \\ af(\sqrt{2})\geq 0 \\ af(-\sqrt{2})\geq 0 \\ -\sqrt{2}\leq\frac{S}{2}\leq\sqrt{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (-m\sqrt{2}+m).(m\sqrt{2}+m)\leq 0 \\ \left\{\begin{array}{l} m^2-4m+8\geq 0 \\ m\sqrt{2}+m\geq 0 \\ -m\sqrt{2}+m\geq 0 \\ -\sqrt{2}\leq-\frac{m}{2}\leq\sqrt{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \forall m.$$

Vậy với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Cách 2: Viết lại (2) dưới dạng:

$$2-t^2=m(t+1) \overset{t=-1 \text{ không là nghiệm}}{\Leftrightarrow} \frac{2-t^2}{t+1}=m.$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng y=m cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2-t^2}{t+1}$ trên D=(-1, 1].

Xét hàm số $y=\frac{2-t^2}{t+1}$ trên D=(-1, 1]

Đạo hàm

$$y'=\frac{-t^2-2t-2}{t+1}<0 \Rightarrow \text{hàm số nghịch biến trên D.}$$

Do đo đường thẳng y=m luôn cắt đồ thị hàm số trên D $\Leftrightarrow$ với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Bài toán 2: Giải phương trình :

$$a(\sin x-\cos x)+b\sin x.\cos x+c=0 \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1. Đặt sinx-cosx=t, điều kiện $|t|\le\sqrt{2} \Rightarrow \sin x.\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$at+b\frac{1-t^2}{2}+c=0 \Leftrightarrow bt^2-2at-2c-b=0 \qquad (2)$$

Bước 2. Giải phương trình (2) theo t và chọn nghiệm t_0 thoả mãn điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$

Với $t=t_0$, ta được:

$$\sin x+\cos x=t_0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=t_0 \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{t_0}{\sqrt{2}}.$$

Đây là phương trình cơ bản của sin.

Chú ý : Cũng như trong bài toán 1, ta có thể giải phương trình nửa đối xứng đối với sinx và cosx bằng cách đặt ẩn phụ $z=\frac{\pi}{4}-x$.

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$6(\sin x-\cos x)+\sin x\cos x+6=0$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đặt sinx-cosx=t, điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$6t-\frac{1-t^2}{2}+6=0 \Leftrightarrow t^2-12t-13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=13\ (l)\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x-\cos x=-1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=-1 \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=\pi+2k\pi\end{array}\right., (k\in Z).$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Đặt $z=\frac{\pi}{4}-x$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$6\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}\sin 2x+6=0 \Leftrightarrow 12\sqrt{2}\sin(-z)+\sin 2(\frac{\pi}{4}-z)+12=0$$

$$\Leftrightarrow -12\sqrt{2}\sin z+\sin(\frac{\pi}{2}-2z)+12=0 \Leftrightarrow -12\sqrt{2}\sin z+\cos 2z+12=0$$

$$\Leftrightarrow -12\sqrt{2}\sin z+(1-2\sin^2 z)+12=0 \Leftrightarrow -2\sin^2 z-12\sqrt{2}\sin z+13=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin z=-\frac{13\sqrt{2}}{2}\ (\text{loại}) \\ \sin z=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ z=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ \frac{\pi}{4}-x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2k\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}-2k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 5: Cho phương trình sau:

$$4(\cos x-\sin x)+\sin 2x=m. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=1.

b. Tìm m để phương trình vô nghiệm.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$4(\cos x-\sin x)+2\sin x.\cos x=m$$

Đặt cosx- sinx=t, đk $|t|\le\sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$4t+1-t^2=m \Leftrightarrow -t^2+4t+1-m=0. \qquad (2)$$

a. Với m=1, ta được:

$$-t^2+4t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=4\ (\text{loại})\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x-\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta đi xét bài toán ngược "*Tìm m để phương trình có nghiệm*"

Phương trình (1) có nghiệm ⇔ (2) có nghiệm thoả mãn $|t|\le\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2)\text{ có 1 nghiệm thuộc }[-\sqrt{2},\sqrt{2}] \\ (2)\text{ có 2 nghiệm thuộc }[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-\sqrt{2}).f(\sqrt{2})\le 0 \\ \begin{cases} \Delta'\ge 0 \\ af(\sqrt{2})\ge 0 \\ af(-\sqrt{2})\ge 0 \\ -\sqrt{2}\le\frac{S}{2}\le\sqrt{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (-1-4\sqrt{2}-m).(1+4\sqrt{2}-m)\le 0 \\ \begin{cases} 5-m\ge 0 \\ 1+4\sqrt{2}-m\ge 0 \\ -1-4\sqrt{2}-m\ge 0 \\ -\sqrt{2}\le 2\le\sqrt{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow |m|\le 4\sqrt{2}+1$$

Vậy phương trình vô nghiệm khi $|m|>4\sqrt{2}+1$.

Cách 2: Viết lại (2) dưới dạng:

$$-t^2+4t+1=m$$

Vậy phương trình vô nghiệm ⇔ đường thẳng y=m không cắt phần đồ thị hàm số $y=-t^2+4t+1$ trên $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Xét hàm số $y=-t^2+4t+1$ trên $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Đạo hàm

$y'=-2t+4>0, \forall t\in[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, do đó hàm số đồng biến trên $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Từ đó, ta được điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l} m < y(-\sqrt{2}) \\ m > y(\sqrt{2}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -4\sqrt{2}-1 \\ m > 4\sqrt{2}+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow |m|>4\sqrt{2}+1.$$

Vậy phương trình vô nghiệm khi $|m|>4\sqrt{2}+1$.

Ví dụ 6: Cho phương trình sau:

$$\sin^3x-\cos^3x=m. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=1.

b. Tìm m để phương trình có đúng ba nghiệm thuộc $[0, \pi]$.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin x-\cos x)+3\sin x.\cos x(\sin x-\cos x)=m$$

Đặt $\sin x-\cos x=t$, điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t^3+3t.\frac{1-t^2}{2}=m \Leftrightarrow -t^3+3t=2m. \qquad (2)$$

a. Với m=1, ta được:

$$t^3-3t+2=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+2)=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \sin x-\cos x=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=1 \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=\pi+2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Với $x\in[0, \pi] \Rightarrow t\in[-1, \sqrt{2}]$.

Ta có nghận xét sau:

- Với mỗi $t_0\in(-1, 1) \vee t_0=\sqrt{2}$ thì phương trình

$$\sin x-\cos x=t_0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=t_0 \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{t_0}{\sqrt{2}}$$

sẽ có đúng 1 nghiệm $x\in[0, \pi]$

- Với mỗi $t_0\in[1, \sqrt{2})$ thì phương trình

$$\sin x-\cos x=t_0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=t_0 \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{t_0}{\sqrt{2}}$$

sẽ có đúng 2 nghiệm $x\in[0, \pi]$

Vậy để phương trình (1) có đúng ba nghiệm thuộc $[0, \pi]$

⇔ (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 thoả mãn $-1<t_1<1<t_2<\sqrt{2}$.

Xét hàm số $y=-t^3+3t$ trên $[-1, \sqrt{2}]$.

Đạo hàm

$y'=-3t^2+3$, $y'=0 \Leftrightarrow -3t^2+3=0 \Leftrightarrow t=\pm1$

Bảng biến thiên

t	-∞	-1		1		$\sqrt{2}$	+∞
y'	▨		+	0	-		▨
y	▨	-2	↗	2	↘	$\sqrt{2}$	▨

Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là:

$$\sqrt{2}<2m<2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}<m<1.$$

Cách 2: Số nghiệm thuộc $[0, \pi]$ của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sin^3x-\cos^3x$ trên $[0, \pi]$ với đường thẳng y=m.

Xét hàm số $y=\sin^3x-\cos^3x$ trên $[0, \pi]$.

Đạo hàm

$$y'=-3\cos x.\sin^2x+3\sin x.\cos^2x,$$

$$y'=0 \Leftrightarrow 3\cos x.\sin^2x+3\sin x.\cos^2x=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(\sin x+\cos x)\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x=0 \\ \sin x+\cos x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x=0 \\ \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=k\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=k\pi \end{array}\right. \overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \\ x=\pi \\ x=\frac{3\pi}{4} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	-∞	0		π/2		3π/4		π	+∞
y'	▨	0	+	0	-	0	+	0	▨
y	▨	-1	↗	1	↘	$\sqrt{2}/2$	↗	1	▨

Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<m<1.$$

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (Đề 2): Giải phương trình:

$$\cos x+\frac{1}{\cos x}+\sin x+\frac{1}{\sin x}=\frac{10}{3}.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện

$$\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2},\ (k\in Z).$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin x+\cos x+\frac{\sin x+\cos x}{\sin x.\cos x}-\frac{10}{3}=0.$$

Đặt sinx+cosx=t, đk $|t|\le\sqrt{2}$, suy ra sinx.cosx=$\frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t+\frac{2t}{t^2-1}-\frac{10}{3}=0\Leftrightarrow 3t^3-10t^2+3t+10=0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(3t^2-4t-5)=0\overset{|t|\le\sqrt{2}}{\Leftrightarrow} t=\frac{2-\sqrt{19}}{3}\Leftrightarrow \sin x+\cos x=\frac{2-\sqrt{19}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{2-\sqrt{19}}{3}\Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}=\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+\alpha+2k\pi\\ x=\frac{5\pi}{4}-\alpha+2k\pi\end{array}\right.,\ (k\in Z).$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Bài 2: (ĐHNT-98): Giải phương trình:

$$\sin x+\sin^2x+\sin^3x+\sin^4x=\cos x+\cos^2x+\cos^3x+\cos^4x.$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$$\sin^3x-\cos^3x=(\sin x-\cos x)(\sin^2x+\cos^2x+\sin x.\cos x)$$
$$\sin^4x-\cos^4x=(\sin^2x-\cos^2x)(\sin^2x+\cos^2x)=-\cos 2x$$

Phương trình được viết lại dưới dạng

$$\sin x-\cos x+\sin^2x-\cos^2x+\sin^3x-\cos^3x+\sin^4x-\cos^4x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x-\cos x-\cos 2x+(\sin x-\cos x)(1+\sin x.\cos x)-\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x-\cos x-2\cos 2x+(\sin x-\cos x)(1+\sin x.\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)[1+2(\sin x+\cos x)+1+\sin x.\cos x]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sin x-\cos x=0 & (1)\\ 2(\sin x+\cos x)+\sin x.\cos x+2=0 & (2)\end{array}\right.$$

- *Giải (1)*: Ta được:

$$\text{tgx}=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ (k\in Z).$$

- Giải (2)

Đặt sinx+cosx=t điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$. suy ra sinx.cosx=$\frac{t^2-1}{2}$

Khi đó (2) có dạng:

$$2t+\frac{t^2-1}{2}+2=0\Leftrightarrow t^2+4t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=-3\ (l)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin x+\cos x=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ x=\pi+2k\pi\end{array}\right.,\ (k\in Z).$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Bài 3: (ĐHSP TP.HCM - ĐHL TP.HCM): Tìm m để phương trình

$$2\cos 2x+(\sin x\cos x-m)(\sin x+\cos x)=0 \qquad (1)$$

có nghiệm trong khoảng $[0,\frac{\pi}{2}]$.

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin x+\cos x)[2(\cos x-\sin x)+\sin x.\cos x-m]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ 2(\cos x-\sin x)+\sin x.\cos x=m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\quad (l)\\ 2(\cos x-\sin x)+\sin x.\cos x=m\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos x-\sin x)+\sin x.\cos x-m]=0 \qquad (2)$$

Đặt t=cosx-sinx, vì $x\in[0,\frac{\pi}{2}]\Leftrightarrow t\in[-1,1]$

Khi đó sinx.cosx=$\frac{1-t^2}{2}$, phương trình (2) có dạng:

$$-\frac{1}{2}t^2+2t+\frac{1}{2}=m \qquad (3)$$

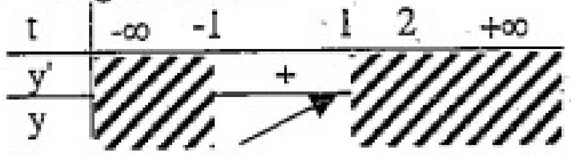
Vậy (1) có trong khoảng $[0,\frac{\pi}{2}]\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm thuộc [-1, 1]

Xét hàm số $f(t)=-\frac{1}{2}t^2+2t+\frac{1}{2}$.

- Miền xác định D=[-1, 1]
- Đạo hàm

$$f'(t)=-t+2,\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=2.$$

- Bảng biến thiên:



DIỄN ĐÀN TOÁN - LÍ - HÓA ẤP 2+3 ĐỊA CHỈ: 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

Vậy, phương trình có nghiệm thuộc [-1, 1] khi:

$f(-1)\le m\le f(1) \Leftrightarrow -2\le m\le 2.$

Bài 4: (Đề 8): Giải và biện luận phương trình:

$$\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}=k$$

BÀI GIẢI

Điều kiện

$$\begin{cases}\sin x\ne 0\\ \cos x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ne\frac{k\pi}{2},\ (k\in Z).$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sin x-\cos x}{\sin x.\cos x}-k=0 \Leftrightarrow \sin x-\cos x-k\sin x.\cos x=0.$$

Đặt sinx-cosx=t, điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t-k.\frac{1-t^2}{2}=0 \Leftrightarrow f(t)=kt^2+2t-k=0 \qquad (2)$$

1. Với k=0, ta được:

$$t=0 \Leftrightarrow \sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ (k\in Z).$$

Vậy với k=0 phương trình có một họ nghiệm.

2. Với k≠0, ta có:

$\Delta=1+k^2>0\ \forall k$, suy ra phương trình (2) có hai nghiệm là:

$$t_1=\frac{-1-\sqrt{1+k^2}}{k};\ t_2=\frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k}$$

Phương trình (1) có nghiệm ⇒ (2) có nghiệm thoả mãn $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$.
Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Phương trình (2) có 1 nghiệm thuộc $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

$$\Leftrightarrow f(-\sqrt{2})f(\sqrt{2})\le 0 \Leftrightarrow (k-2\sqrt{2})(k+2\sqrt{2})\le 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2}\le k\le 2\sqrt{2}$$

Khi đó nghiệm thuộc $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ là $t_2=\frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k}$

$$\Leftrightarrow \sin x-\cos x=\frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k} \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k\sqrt{2}}=\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\alpha+2k\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=\pi-\alpha+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\alpha+\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\frac{5\pi}{4}-\alpha+2k\pi\end{array}\right.,\ k\in Z$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Trường hợp 2: Phương trình (2) có 2 nghiệm thuộc $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\ge 0\\ af(\sqrt{2})\ge 0\\ af(-\sqrt{2})\ge 0\\ -\sqrt{2}\le\frac{S}{2}\le\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+k^2\ge 0\\ k(k+2\sqrt{2})\ge 0\\ k(k-2\sqrt{2})\ge 0\\ -\sqrt{2}\le-\frac{1}{k}\le\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k\ge 2\sqrt{2}\\ k\le -2\sqrt{2}\end{array}\right..$$

Khi đó,

- Với $t_1=\frac{-1-\sqrt{1+k^2}}{k}$

$$\Leftrightarrow \sin x-\cos x=\frac{-1-\sqrt{1+k^2}}{k} \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{-1-\sqrt{1+k^2}}{k\sqrt{2}}=\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\alpha+2k\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=\pi-\alpha+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\alpha+\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\frac{5\pi}{4}-\alpha+2k\pi\end{array}\right.,\ k\in Z$$

- Với $t_2=\frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k}$

$$\Leftrightarrow \sin x-\cos x=\frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k} \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k\sqrt{2}}=\sin\beta$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\beta+2k\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=\pi-\beta+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\beta+\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\frac{5\pi}{4}-\beta+2k\pi\end{array}\right.,\ k\in Z$$

Vậy phương trình có bốn họ nghiệm

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

a. 3(sinx+cosx)-4sinxcosx=0.
b. 12(sinx-cosx)-2sinxcosx-12=0.
c. (1+cosx)(1+sinx)=2.

Bài tập 2. Giải các phương trình sau:

a. |sinx-cosx| + 4sin2x=1.
b. |sinx+cosx|-sin2x=0.

Bài tập 3. (ĐHQG Hà Nội Khối B - 97): Giải phương trình:

$$2\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}.$$

Bài tập 4. Tìm m để phương trình

3(sinx+cosx) = 4msinx.cosx

có nghiệm thuộc $(0,\frac{3\pi}{4})$

Bài tập 5. Cho phương trình

$$(1-\cos x)(1-\sin x)=m$$

a. Giải phương trình với m=2.

b. Tìm m để phương trình có đúng 1 nghiệm thuộc $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Bài tập 6. Cho phương trình

$$2\sin^3x+\cos 2x+\cos x=m.$$

a. Giải phương trình với m=0.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 7. Cho phương trình

$$m(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x+1=0.$$

a. Giải phương trình với $m=-\sqrt{2}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

c. Tìm m để phương trình có đúng 1 nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, 0]$.

Bài tập 8. Cho phương trình

$$m(\sin x+\cos x)+\sin 2x=0.$$

a. Giải phương trình với m=1.

b. Tìm m để phương trình vô nghiệm.

c. Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc $[0, \pi]$.

Bài tập 9. Giải và biện luận theo k phương trình

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}=k.$$

Bài tập 10. Cho phương trình

$$m(\sin x-\cos x)+2\sin x\cos x=m.$$

a. Giải phương trình với $m=1+\sqrt{2}$.

b. Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc $[0, \pi]$.

Bài tập 11. Cho phương trình

$$m+\sin^3x+\cos^3x-3\sin x\cos x=0.$$

a. Giải phương trình với m=1.

b. Tìm m để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $[0, \pi]$.

c. Tìm m để phương trình có đúng 4 nghiệm thuộc $[0, \pi]$.

Bài tập 12. Cho phương trình

$$\sin x-\cos x+m\sin x\cos x=1.$$

a. Giải phương trình với m=7.

b. Giải và biện luận phương trình theo m.

Bài tập 13. Xác định m để phương trình:

$$\sin x+\cos x+1+\frac{1}{2}(\mathrm{tg}x+\mathrm{cotg}x+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x})=m$$

có nghiệm $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

Bài tập 14. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sin 2x + 4(\cos x-\sin x)=m.$$

CHỦ ĐỀ 8

PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI tgx VÀ cotgx

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Giải phương trình

$$a(\mathrm{tg}^2x+\mathrm{cotg}^2x)+b(\mathrm{tg}x+\mathrm{cotg}x)+c=0 \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau.

Bước 1. Đặt điều kiện

$$\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Bước 2. Đặt tgx+cotgx=t, đk $|t|\geq 2 \Rightarrow \mathrm{tg}^2x+\mathrm{cotg}^2x=t^2-2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$a(t^2-2)+bt+c=0 \Leftrightarrow at^2+bt+c-2a=0 \qquad (2)$$

Bước 3. Giải phương trình (2) theo t và chọn nghiệm t_0 thoả mãn điều kiện $|t|\geq 2$

Bước 4. Với $t=t_0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}x+\mathrm{cotg}x=t_0$, khi đó ta có thể lựa chọn một trong hai hướng biến đổi sau:

Hướng 1: Ta có:

$$\mathrm{tg}x+\frac{1}{\mathrm{tg}x}=t_0\Leftrightarrow \mathrm{tg}^2x-t_0\mathrm{tg}x+1=0.$$

Đây là phương trình bậc hai theo tgx.

Hướng 2: Ta có:

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=t_0\Leftrightarrow\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x.\cos x}=t_0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2t_0}.$$

Đây là phương trình cơ bản của sin.

Chú ý: Cũng có thể lựa chọn phép đổi biến t=tgx, tuy nhiên khi đó ta sẽ thu được một phương trình bậc cao.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$(\mathrm{tg}x+7)\mathrm{tg}x+(\mathrm{cotg}x+7)\mathrm{cotg}x+14=0.$$

Giải

Điều kiện

$$\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\mathrm{tg}^2x+\mathrm{cotg}^2x)+7(\mathrm{tg}x+\mathrm{cotg}x)+14=0.$$

DIỄN ĐÀN TOÁN - HỌC CẤP 2+3 ĐỊA CHỈ: 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP QUY NHƠN

Đặt tgx+cotgx=t, điều kiện $|t|\geq 2$, suy ra $tg^2x+cotg^2x=t^2-2$.
Khi đó phương trình có dạng:

$$t^2-2+7t+14=0 \Leftrightarrow t^2+7t+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=-4 \end{array}\right.$$

- Với t=-3, ta được:

$$tgx+cotgx=-3 \Leftrightarrow tgx+\frac{1}{tgx}=-3 \Leftrightarrow tg^2x+3tgx+1=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}=tg\alpha \\ tgx=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}=tg\beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k\pi \\ x=\beta+k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

- Với t=-4, ta được:

$$tgx+cotgx=-4 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=-4 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x.\cos x}=-4$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ 2x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\frac{7\pi}{12}+k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có bốn họ nghiệm.

Nhận xét: Qua việc lựa chọn hai phương pháp giải để tìm ra nghiệm x khi biết t_0 các em hãy lựa chọn cho mình một phương pháp phù hợp.

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$tg^2x+cotg^2x+m(tgx+cotgx)+2m=0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m=-\frac{1}{2}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện

$$\left\{\begin{array}{l} \sin x\neq 0 \\ \cos x\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Đặt tgx+cotgx=t, với $|t|\geq 2$, suy ra $tg^2x+cotg^2x=t^2-2$.
Khi đó phương trình có dạng:

$$t^2-2+mt+2m=0 \Leftrightarrow f(t)=t^2+mt+2m-2=0 \qquad (2)$$

a. Với $m=-\frac{1}{2}$, ta được:

$$t^2-\frac{1}{2}t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-3/2\ (loại) \end{array}\right. \Leftrightarrow tgx+cotgx=2$$

$$\Leftrightarrow tgx=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, (k\in Z).$$

Vậy, với $m=-\frac{1}{2}$ phương trình có một họ nghiệm.

b. Để tìm m sao cho phương trình có nghiệm ta lựa chọn 1 trong 2 cách sau:

Cách 1: Phương trình (1) có nghiệm ⇔ phương trình (2) có nghiệm $|t|\geq 2$.

Xét bài toán ngược: *"Tìm điều kiện để phương trình đã cho vô nghiệm"*.

Phương trình đã cho vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2)\ vo\ nghiem \\ (2)\ co\ hai\ nghiem\ \ thuoc\ (-2.2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta<0 \\ \left\{\begin{array}{l} \Delta\geq 0 \\ af(-2)>0 \\ af(2)>0 \\ -2<\frac{S}{2}<2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-8m-8<0 \\ \left\{\begin{array}{l} m^2-8m-8\geq 0 \\ 2>0 \\ 4m+2>0 \\ -2<-\frac{m}{2}<2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<m<4+2\sqrt{2}.$$

Vậy, với $m\leq -\frac{1}{2}$ hoặc $m\geq 4+2\sqrt{2}$ phương trình đã cho có nghiệm.

Cách 2: Vì t=-2 không phải là nghiệm của phương trình, nên viết lại (2) dưới dạng:

$$\frac{-t^2+2}{t+2}=m$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm ⇔ đường thẳng y=m cắt phần đồ thị hàm số $y=\frac{-t^2+2}{t+2}$ trên $(-\infty, -2]\cup[2, +\infty)$.

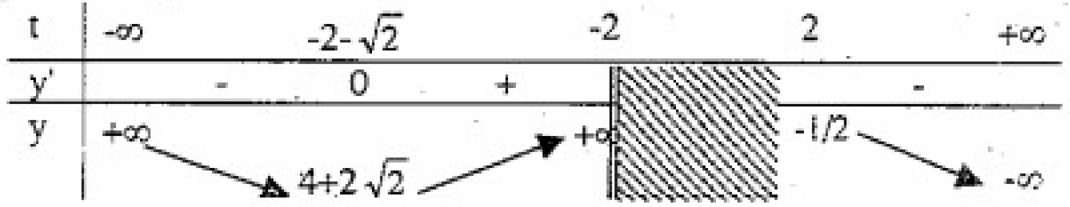
Xét hàm số $y=\frac{-t^2+2}{t+2}$ trên $(-\infty, -2]\cup[2, +\infty)$.

Đạo hàm

$$y'=\frac{-t^2-4t-2}{(t+2)^2},$$

$$y'=0 \Leftrightarrow -t^2-4t-2=0 \Leftrightarrow t=-2\pm\sqrt{2}.$$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là:

$$m\leq -\frac{1}{2} \text{ hoặc } m\geq 4+2\sqrt{2}.$$

Chú ý: Phương pháp được mở rộng tự nhiên cho các phương trình đối xứng bậc cao hơn 2.

Ví dụ 3: Cho phương trình:

$$2tgx+tg^2x+tg^3x+2cotgx+cotg^2x+cotg^3x=m. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=8.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện

$$\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Đặt tgx+cotgx=t, đk |t|≥2, suy ra

$$tg^2x+cotg^2x=t^2-2,$$

$$tg^3x+cotg^3x=(tgx+cotgx)^3-3tgx.cotgx.(tgx+cotgx)=t^3-3t.$$

Khi đó phương trình có dạng:

$$2t+t^2-2+t^3-3t=m \Leftrightarrow t^3+t^2-t-2=m \qquad (2)$$

a. Với m=8, ta được:

$$t^3+t^2-t-10=0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2+3t+5)=0 \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow tgx+cotgx=2$$

$$\Leftrightarrow tgx=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, (k\in Z).$$

Vậy, với m=10 phương trình có một họ nghiệm.

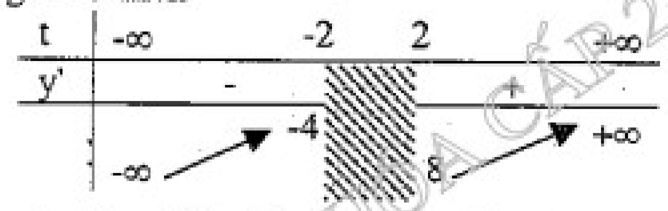
b. Phương trình (1) có nghiệm ⇔ đường thẳng y=m cắt phần đồ thị hàm số $y= t^3+t^2-t-2$ trên $(-\infty, -2]\cup[2, +\infty)$.

Xét hàm số $y= t^3+t^2-t-2$ trên $D=(-\infty, -2]\cup[2, +\infty)$.

Đạo hàm

$$y'=3t^2+2t-1>0, \forall t\in D \Leftrightarrow \text{hàm số đồng biến trên } D.$$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là:

$$m\leq -4 \text{ hoặc } m\geq 8.$$

Bài toán 2: Giải phương trình

$$a(tg^2x+cotg^2x)+b(tgx-cotgx)++c=0 \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Đặt điều kiện

$$\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin2x\neq0 \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Bước 2. Đặt tgx-cotgx=t ⇒ $tg^2x+cotg^2x=t^2+2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$a(t^2+2)+bt+c=0 \Leftrightarrow at^2+bt+c+2a=0 \qquad (2)$$

Bước 3. Giải phương trình (2) theo t.

Bước 4. Với $t=t_0 \Leftrightarrow tgx-cotgx=t_0$, khi đó ta có thể lựa chọn một trong hai hướng biến đổi sau:

Hướng 1: Ta có:

$$tgx-\frac{1}{tgx}=t_0 \Leftrightarrow tg^2x-t_0tgx-1=0.$$

Đây là phương trình bậc hai theo tgx.

Hướng 2: Ta có:

$$\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=t_0 \Leftrightarrow \frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin x.\cos x}=t_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2\cos2x}{\sin2x}=t_0 \Leftrightarrow cotg2x=-\frac{t_0}{2}.$$

Đây là phương trình cơ bản của cotg.

Chú ý: Cũng có thể lựa chọn phép đổi biến t=tgx, tuy nhiên khi đó ta sẽ thu được một phương trình bậc cao.

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$\sqrt{3}(tg^2x+cotg^2x)+2(\sqrt{3}-1)(tgx-cotgx)-4-2\sqrt{3}=0.$$

Giải

Điều kiện

$$\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Đặt tgx-cotgx=t, suy ra $tg^2x+cotg^2x=t^2+2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$\sqrt{3}(t^2+2)+2(\sqrt{3}-1)t-4-2\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}t^2+2(\sqrt{3}-1)t-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-2\\ t=\frac{2}{\sqrt{3}}\end{array}\right.$$

- Với $t=\frac{2}{\sqrt{3}}$, ta được:

$$tgx-cotgx=\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin x.\cos x}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow cotg2x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{3}+k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

- Với t=-2, ta được:

$$tgx-cotgx=-2 \Leftrightarrow tgx-\frac{1}{tgx}=-2 \Leftrightarrow tg^2x+2tgx-1=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tgx=-1-\sqrt{2}=tg\alpha\\ tgx=-1+\sqrt{2}=tg\beta\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\alpha+k\pi\\ x=\beta+k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Nhận xét: Qua việc lựa chọn hai phương pháp giải để tìm ra nghiệm x khi biết t_0 lời khuyên dành cho các em học sinh là hãy lựa chọn hướng 2 để giải, bởi ngay với t=-2, ta được:

$$\mathrm{tg}x-\mathrm{cotg}x=-2 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=-2 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x.\cos x}=-2$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{cotg}2x=1 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Ví dụ 5: Giải và biện luận phương trình:

$$(m-2)(\mathrm{tg}^2x+\mathrm{cotg}^2x)-2m(\mathrm{tg}x-\mathrm{cotg}x)-m+5=0.$$

Giải

Điều kiện

$$\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Đặt tgx-cotgx=t, suy ra $\mathrm{tg}^2x+\mathrm{cotg}^2x=t^2+2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$f(t)=(m-2)t^2-2mt+m+1=0. \qquad (2)$$

Xét hai trường hợp

Trường hợp 1. m-2=0 ⇔ m=2

$$(3) \Leftrightarrow 4t-3=0 \Leftrightarrow t=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \mathrm{tg}x-\mathrm{cotg}x=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \mathrm{cotg}2x=-\frac{3}{2}=\mathrm{cotg}2\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2x=2\alpha+k\pi \Leftrightarrow x=\alpha+\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Trường hợp 2. m≠2, ta đi tính biệt thức $\Delta'=m+2$.

a. Nếu $\Delta'<0 \Leftrightarrow m+2<0 \Leftrightarrow m<-2$.
Phương trình (2) vô nghiệm ⇔ (1) vô nghiệm.

b. Nếu $\Delta'=0 \Leftrightarrow m=-2$.
Phương trình (2) có nghiệm kép

$$t_0=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{tg}x-\mathrm{cotg}x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{cotg}2x=-\frac{1}{4}=\mathrm{cotg}2\beta \Leftrightarrow 2x=2\beta+k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\beta+\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

c. Nếu $\Delta'>0 \Leftrightarrow m>-2$.
Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt:

$$t_{1,2}=\frac{m-2\pm\sqrt{4-m}}{m} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}x-\cot gx=t_1\\ \mathrm{tg}x-\cot gx=t_2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot g2x=-\frac{t_1}{2}=\cot g2\gamma_1\\ \cot g2x=-\frac{t_2}{2}=\cot g2\gamma_2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=2\gamma_1+k\pi\\ 2x=2\gamma_2+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\gamma_1+\frac{k\pi}{2}\\ x=\gamma_2+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right., k\in Z.$$

Kết luận:

- Với m=2, phương trình có nghiệm $x=\alpha+\frac{k\pi}{2}$, k∈Z.
- Với m=-2, phương trình có nghiệm $x=\beta+\frac{k\pi}{2}$, k∈Z.
- Với m<-2, phương trình vô nghiệm.
- Với m>-2, phương trình có nghiệm: $x=\gamma_1+\frac{k\pi}{2}$ và $x=\gamma_2+\frac{k\pi}{2}$, k∈Z.

Chú ý: Phương pháp được mở rộng tự nhiên cho các phương trình đối xứng bậc cao hơn 2.

Ví dụ 6: Cho phương trình:

$$\mathrm{tg}^3x-\mathrm{cotg}^3x-3(\mathrm{tg}^2x+\mathrm{cotg}^2x)-3(\mathrm{tg}x-\mathrm{cotg}x)+m+6=0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=4.

b. Biện luận theo m số nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$ của phương trình.

Giải

Điều kiện

$$\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Đặt tgx-cotgx=t, suy ra

$\mathrm{tg}^2x+\mathrm{cotg}^2x=t^2+2$,

$\mathrm{tg}^3x-\mathrm{cotg}^3x=(\mathrm{tg}x-\mathrm{cotg}x)^3+3\mathrm{tg}x.\mathrm{cotg}x.(\mathrm{tg}x-\mathrm{cotg}x)=t^3+3t$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t^3+3t-3(t^2+2)-3t+m+6=0 \Leftrightarrow t^3-3t^2+m=0 \qquad (2)$$

a. Với m=4, ta được:

$$t^3-3t^2+4=0 \Leftrightarrow (t+1)(t^2-4t+4)=0 \Leftrightarrow (t+1)(t-2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}x-\cot gx=-1\\ \mathrm{tg}x-\cot gx=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot g2x=\frac{1}{2}=\cot g2\alpha\\ \cot g2x=-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=2\alpha+k\pi\\ 2x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\alpha+\frac{k\pi}{2}\\ x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy, với m=4 phương trình có hai họ nghiệm.

b. Với mỗi nghiệm t_0 của phương trình (2), ta được:

$$\mathrm{tg}x-\mathrm{cotg}x=t_0 \Leftrightarrow \mathrm{cotg}2x=-\frac{t_0}{2}$$

Mặt khác vì $x\in(0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow 2x\in(0, \pi)$

Do đó với mỗi nghiệm t_0 của (2) ta có được 1 nghiệm $x_0\in(0, \frac{\pi}{2})$ của (1).

Số nghiệm của (2) bằng số giao điểm của đường thẳng y=-m với đồ thị hàm số $y=t^3-3t^2$.

Xét hàm số $y=t^3-3t^2$

Đạo hàm

$$y'=3t^2-6t,\ y'=0 \Leftrightarrow 3t^2-6t=0 \Leftrightarrow t=0 \vee t=2.$$

Bảng biến thiên

$$\begin{array}{c|ccccccc}
t & -\infty & & 0 & & 2 & & +\infty \\
\hline
y' & & + & 0 & - & 0 & + & \\
\hline
y & -\infty & \nearrow & 0 & \searrow & -4 & \nearrow & +\infty
\end{array}$$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có kết luận - *Bạn đọc tự đưa ra lời kết luận*

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (Đề 13): Cho phương trình:

$$\frac{3}{\sin^2 x}+3tg^2x+m(tgx+cotgx)-1=0. \qquad (1)$$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

BÀI GIẢI

Điều kiện

$$\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3(1+cotg^2x)+3tg^2x+m(tgx+cotgx)-1=0$$
$$\Leftrightarrow 3(tg^2x+cotg^2x)+m(tgx+cotgx)+2=0$$

Đặt tgx+cotgx=t, điều kiện $|t|\geq 2$, suy ra $tg^2x+cotg^2x=t^2-2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$3(t^2-2)+mt+2=0 \Leftrightarrow f(t)=3t^2+mt-4=0 \qquad (2)$$

Để tìm m sao cho phương trình có nghiệm ta lựa chọn 1 trong 2 cách sau:

Cách 1: Ta đi xét bài toán ngược "*Tìm m để phương trình vô nghiệm*"

Phương trình (1) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{(2) vô nghiệm}\\ \text{(2) có 2 nghiệm thuộc } (-2,2)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta<0\\ \begin{cases}\Delta\geq 0\\ af(2)>0\\ af(-2)>0\\ -2<S/2<2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow -4<m<4.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi $m\in R\backslash(-4, 4)$.

Cách 2: Viết lại (2) dưới dạng:

$$\frac{-3t^2+4}{t}=m$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm ⇔ đường thẳng y=m cắt phần đồ thị hàm số $y=\frac{-3t^2+4}{t}$ trên $D=(-\infty, -2]\cup[2, +\infty)$.

Xét hàm số $y=\frac{-3t^2+4}{t}$ trên $D=(-\infty, -2]\cup[2, +\infty)$.

Đạo hàm

$$y'=\frac{-3t^2-4}{t^2}<0,\ \forall t\in D,$$ do đó hàm số nghịch biến trên D.

Từ đó, ta được điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l}m\leq y(2)\\ m\geq y(-2)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\leq -4\\ m\geq 4\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi $|m|\geq 4$.

Bài 2: Cho phương trình:

$$tg^3x-cotg^3x-3(tg^2x+cotg^2x)-12(tgx-cotgx)+m+6=0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=2.

b. Tìm m để (1) có 3 nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3\in(0, \frac{\pi}{2})$ và thoả mãn:

$$\frac{\sin 2(x_1-x_2)}{\sin 2x_1}-\frac{\sin 2(x_2-x_3)}{\sin 2x_3}=0.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện

$$\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in Z.$$

Đặt tgx-cotgx=t, suy ra

$$tg^2x+cotg^2x=t^2+2,$$
$$tg^3x-cotg^3x=(tgx-cotgx)^3+3tgx.cotgx.(tgx-cotgx)=t^3+3t.$$

Khi đó phương trình có dạng:

$$t^3+3t-3(t^2+2)-12t+m+6 \Leftrightarrow t^3-3t^2-9t+m=0 \qquad (2)$$

a. Với m=2, ta được:

$$t^3-3t^2-9t+2=0 \Leftrightarrow (t+2)(t^2-5t+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}\\ t=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tgx-\cot gx=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}\\ tgx-\cot gx=-2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot g2x=-\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}=\cot g2\alpha_{1,2}\\ \cot g2x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\alpha_{1,2}+\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy, với m=2 phương trình có ba họ nghiệm.

b. Với mỗi nghiệm t_0 của phương trình (2), ta được:

$$tgx-cotgx=t_0 \Leftrightarrow cotg2x=-\frac{t_0}{2}$$

Mặt khác vì $x\in(0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow 2x\in(0, \pi)$

Do đó với mỗi nghiệm t_0 của (2) ta có được 1 nghiệm $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ của (1).

Từ biểu thức điều kiện, ta được:

$$\frac{\sin 2(x_1 - x_2)}{\sin 2x_1} = \frac{\sin 2(x_2 - x_3)}{\sin 2x_3} \Leftrightarrow \frac{\sin 2(x_1 - x_2)}{\sin 2x_1 . \sin 2x_2} = \frac{\sin 2(x_2 - x_3)}{\sin 2x_2 \sin 2x_3}$$

$$\Leftrightarrow \text{cotg}2x_1 - \text{cotg}2x_2 = \text{cotg}2x_2 - \text{cotg}2x_3 \Leftrightarrow \text{cotg}2x_1 + \text{cotg}2x_3 = 2\text{cotg}2x_2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{t_1}{2} - \frac{t_3}{2} = -2.\frac{t_2}{2} \Leftrightarrow t_1 + t_3 = 2t_2$$

$\Leftrightarrow$ (2) có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Để phương trình có ba nghiệm phân biệt với hoành độ lập thành cấp số cộng thì điểm uốn U(1, -11) của đồ thị hàm số $y=t^3-3t^2-9t$ thuộc đường thẳng $y=-m$

$\Leftrightarrow -m=-11 \Leftrightarrow m=11$.

Thử lại: với m=11 phương trình (2) có dạng:

$$t^3-3t^2-9t+11=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2-2t-11)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1-2\sqrt{3} \\ t_2 = 1 \\ t_3 = 1+2\sqrt{3} \end{array}\right., \text{ thoả mãn.}$$

Vậy, với m=11 thoả mãn điều kiện đầu bài.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình

a. cotgx-tgx=sinx-cosx.

b. $\text{tg}x + \text{tg}^2x + \text{cotg}x + \text{cotg}^2x = 6$

Bài tập 2. Cho phương trình

$$3(\text{tg}^2x+\text{cotg}^2x)+4(\text{tg}x+\text{cotg}x)+m=0$$

a. (CĐHQ - 2000): Giải phương trình với m=2.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 3. Cho phương trình

$$\text{tg}x+\text{tg}^2x+\text{tg}^3x+\text{cotg}x+\text{cotg}^2x+\text{cotg}^3x=m$$

a. Giải phương trình với m=6.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 4. Cho phương trình

$$\frac{1}{\cos^2 x}+\text{cotg}^2x + m(\text{tg}x + \text{cotg}x) + 2 = 0$$

a. Giải phương trình khi $m = \frac{5}{2}$

b. Xác định m để phương trình có nghiệm

Bài tập 5. Với giá trị nào của m thì phương trình sau đây có nghiệm:

$$\frac{3}{\sin^2 x}+\text{tg}^2x+m(\text{tg}x+\text{cotg}x)-1=0.$$

CHỦ ĐỀ 9

LOẠI NGHIỆM KHÔNG THÍCH HỢP

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Loại nghiệm không thích hợp của phương trình lượng giác

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thường gặp 2 dạng toán sau:

Dạng 1: Tìm nghiệm thuộc (a, b) của phương trình.

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình.

Bước 2: Giải phương trình để tìm nghiệm $x=\alpha+\frac{2k\pi}{n}$, k, n∈Z.

Bước 3: Tìm nghiệm thuộc (a, b):

$$a<\alpha+\frac{2k\pi}{n}<b \overset{k,n\in Z}{\Leftrightarrow} (k_0, l_0) \Rightarrow x_0=\alpha+\frac{2k_0\pi}{n_0}.$$

Dạng 2: Phương trình chứa ẩn ở mẫu.

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình $x \neq \beta+\frac{2l\pi}{n}$, l, n∈Z

Bước 2: Giải phương trình để tìm nghiệm $x_0=\alpha+\frac{2k\pi}{n}$, k, n∈Z.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

Phương pháp đại số:

- Nghiệm x_0 bị loại khi và chỉ khi:

$$\alpha+\frac{2k\pi}{n}=\beta+\frac{2l\pi}{n}.$$

- Nghiệm x_0 chấp nhận được khi và chỉ khi:

$$\alpha+\frac{2k\pi}{n}\neq\beta+\frac{2l\pi}{n}.$$

Phương pháp hình học:

- Biểu diễn các điểm $x=\beta+\frac{2l\pi}{n}$, l, n∈Z trên đường tròn đơn vị, khi đó ta được tập các điểm C={C_1,..., C_p}.
- Biểu diễn các điểm $x=\alpha+\frac{2k\pi}{n}$, k, n∈Z. trên đường tròn đơn vị, khi đó ta được tập các điểm D={D_1,..., D_q}.
- Lấy tập E=D\C={E_1,...,E_r}, từ đó kết luận nghiệm của phương trình là:

$$x=E_1+2k\pi,... x=E_r+2k\pi, k\in Z.$$

Ví dụ 1: (Đề 16): Tìm các nghiệm thuộc $(\frac{\pi}{2}, 3\pi)$ của phương trình:

$$\sin(2x+\frac{5\pi}{2})-3\cos(x-\frac{7\pi}{2})=1+2\sin x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin(2x+\frac{\pi}{2}+2\pi)-3\cos(x+\frac{\pi}{2}-4\pi)=1+2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+3\sin x=1+2\sin x \Leftrightarrow 1-2\sin^2 x=1-\sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right. \overset{x\in(\frac{\pi}{2},3\pi)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}x=\pi,\ x=2\pi\\ x=\frac{13\pi}{6}\\ x=\frac{5\pi}{6},\ x=\frac{17\pi}{6}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 5 nghiệm.

Ví dụ 2: (ĐH Việt Nam Khối D - 2002). Tìm các nghiệm thuộc $[0, 2\pi]$ của phương trình :

$$5(\sin x+\frac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x})=\cos 2x+3.$$

Giải

Điều kiện:

$$1+2\sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x\neq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x\neq -\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ 2x\neq \frac{7\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\neq -\frac{\pi}{12}+k\pi\\ x\neq \frac{7\pi}{12}+k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\cos 3x+\sin 3x&=4\cos^3 x-3\cos x+3\sin x-4\sin^3 x\\ &=4(\cos^3 x-\sin^3 x)-3(\cos x-\sin x)\\ &=(\cos x-\sin x)[4(1+\cos x.\sin x)-3]\\ &=(\cos x-\sin x)(1+2\sin 2x)\end{aligned}$$

Khi đó phương trình có dạng:

$$5(\sin x+\cos x-\sin x)=\cos 2x+3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x-5\cos x+2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=2\ (l)\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z \overset{x\in[0,2\pi]}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}\\ x=\frac{5\pi}{3}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

Ví dụ 3: (ĐHKT - 99): Giải phương trình:

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin 2x}=\frac{2}{\sin 4x}.$$

Giải

Điều kiện

$$\sin 4x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{4}, k\in Z. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\sin x.\cos 2x+2\cos 2x=2 \Leftrightarrow 2\sin x.\cos 2x=1-\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos 2x=2\sin^2 x \Leftrightarrow (\cos 2x-\sin x)\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow (1-2\sin^2 x-\sin x)\sin x=0 \Leftrightarrow (\sin x+1)(2\sin x-1)\sin x=0$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm

Nhận xét: Trong lời giải trên chúng ta đã linh hoạt trong việc kiểm tra điều kiện (*) để loại đi các nghiệm $\sin x=0$ và $\sin x=-1$, bởi:

$$\sin 4x=4\sin x.\cos x.\cos 2x.$$

Ví dụ 4: (ĐH Huế Khối A - 99): Giải phương trình:

$$\frac{\sin x.\cot g5x}{\cos 9x}=1.$$

Giải

Điều kiện

$$\begin{cases}\sin 5x\neq 0\\ \cos 9x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x\neq l\pi\\ 9x\neq\frac{\pi}{2}+l\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq\frac{l\pi}{5}\\ x\neq\frac{\pi}{18}+\frac{l\pi}{9}\end{cases}, l\in Z. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos 5x.\sin x=\cos 9x.\sin 5x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 6x-\sin 4x)=\frac{1}{2}(\sin 14x-\sin 4x)$$

$$\Leftrightarrow \sin 14x=\sin 6x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}14x=6x+2k\pi\\ 14x=\pi-6x+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{4}\\ x=\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10}\end{array}\right., k\in Z.$$

Kiểm tra điều kiện (*)

Với $x=\frac{k\pi}{4}$, ta cần có:

$$\begin{cases}\frac{k\pi}{4}\neq\frac{l\pi}{5}\\ \frac{k\pi}{4}\neq\frac{\pi}{18}+\frac{l\pi}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5k\neq 4l\\ 9k\neq 2+4l\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k=4n+1\\ k=4n+3\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{(4n+1)\pi}{4}\\ x=\frac{(4n+3)\pi}{4}\end{array}\right., n\in Z.$$

- Với $x=\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10}$, ta cần có:

$$\begin{cases}\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10}\neq\frac{l\pi}{5}\\ \frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10}\neq\frac{\pi}{18}+\frac{l\pi}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+2k\neq 4l\\ 18k\neq 1+20l\end{cases}\text{ luôn đúng }\Rightarrow x=\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10},\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Nhận xét: Trong lời giải trên từ

$$\begin{cases}5k\neq 4l & (1)\\ 9k\neq 2+4l & (2)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=4n+1\\ k=4n+3\end{array}\right.$$

bởi từ (1) suy ra k không chia hết cho 4 và từ (2) suy ra k lẻ, do đó

$$\left[\begin{array}{l}k=4n+1\\ k=4n+3\end{array}\right. \qquad (I)$$

rồi lại thực hiện phép thử (I) và (2).

Còn đối với

$$\begin{cases}1+2k\neq 4l\\ 18k\neq 1+20l\end{cases}\text{ luôn đúng}$$

xuất phát từ tính chẵn lẻ của hai vế.

Ví dụ 5: (ĐHQG Hà Nội - 2001): Giải phương trình:

$$\sin 3x=\cos x.\cos 2x.(tg^2x+tg2x).$$

Giải

Điều kiện

$$\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ 2x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\end{cases},\ k\in Z. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 3x=\cos x.\cos 2x.\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x=\frac{\sin^2 x.\cos 2x}{\cos x}+\sin 2x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow (3\sin x-4\sin^3x).\cos x=(\cos 2x.\sin x+2\cos^3x)\sin x$$

$$\Leftrightarrow [(3-4\sin^2x).\cos x-(\cos 2x.\sin x+2\cos^3x)]\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)\cos 2x.\sin x=0\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (ĐH Việt Nam Khối D - 2002) Tìm x thuộc đoạn [0, 14] nghiệm đúng phương trình:

$$\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0.$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\cos^3x-3\cos x-4(\cos 2x+1)+3\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3x-8\cos^2x=0\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Vì $x\in[0, 14]$ nên

$$0\leq\frac{\pi}{2}+k\pi\leq 14\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\leq k\leq\frac{14-\frac{\pi}{2}}{\pi}\Leftrightarrow k=0, 1, 2, 3.$$

Vậy phương trình có các nghiệm $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$, $x=\frac{5\pi}{2}$, $x=\frac{7\pi}{2}$.

Bài 2: (ĐHKTQD TPHCM - 90): Giải phương trình:

$$\frac{\cos 2x+3\cot g2x+\sin 4x}{\cot g2x-\cos 2x}=2$$

BÀI GIẢI

Điều kiện

$$\begin{cases}\sin 2x\neq 0\\ \cot g2x-\cos 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2x\neq 0\\ (\frac{1}{\sin 2x}-1)\cos 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2x\neq 0\\ \cos 2x\neq 0\\ \sin 2x\neq 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{4},\ k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos 2x+3.\frac{\cos 2x}{\sin 2x}+2\sin 2x.\cos 2x=2(\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{3}{\sin 2x}+2\sin 2x=2(\frac{1}{\sin 2x}-1)\Leftrightarrow 2\sin^2 2x+3\sin 2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=-1\ \text{(loại)}\\ \sin 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ 2x=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\frac{7\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Bài 3: (ĐHKT-96). Giải phương trình :

$$\frac{(1-\cos x)^2+(1+\cos x)^2}{4(1-\sin x)}-tg^2x.\sin x=\frac{1+\sin x}{2}+tg^2x.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện

$$\begin{cases}\sin x\neq 1\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{2+2\cos^2 x}{4(1-\sin x)}=\frac{1+\sin x}{2}+(1+\sin x)\mathrm{tg}^2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos^2 x}{2(1-\sin x)}=\frac{1+\sin x}{2}(1+2\mathrm{tg}^2x)=\frac{1+\sin x}{2}\cdot\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1+\sin x}{2}\cdot\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{1-\sin^2 x}=\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{2(1-\sin x)}$$

$$\Leftrightarrow 1+\cos^2x=\cos^2x+2\sin^2x \Leftrightarrow 1-2\sin^2x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z$.

Bài 4: (ĐHQG-96). Giải phương trình:

$$3\sin^2x+\frac{1}{2}\sin 2x+2\cos^2x=\frac{3(\sin^4 x+\cos^4 x-1)}{\sin^6 x+\cos^6 x-1}.$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$\sin^4x+\cos^4x-1=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x.\cos^2x-1=-2\sin^2x.\cos^2x.$

$\sin^6x+\cos^6x-1=(\sin^2x+\cos^2x)^3-3\sin^2x.\cos^2x(\sin^2x+\cos^2x)-1$

$=-3\sin^2x.\cos^2x.$

Điều kiện

$$\sin^6x+\cos^6x-1\neq 0 \Leftrightarrow -3\sin^2x.\cos^2x\neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in Z. (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3\sin^2x+\frac{1}{2}\sin 2x+2\cos^2x=2 \Leftrightarrow \sin^2x+\sin x.\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(\sin x+\cos x)=0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$.

Bài 5: (ĐHXD-97). Giải phương trình:

$$\frac{\sin^4 2x+\cos^4 2x}{\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-x)\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}+x)}=\cos^4 2x.$$

BÀI GIẢI

Ta có

$$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-x)\,\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}+x)=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-x)\,\mathrm{cotg}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-x)=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-x)\,\mathrm{cotg}(\frac{\pi}{4}-x)=1.$$

Điều kiện

$$\begin{cases}\cos(\frac{\pi}{4}-x)\neq 0\\ \cos(\frac{\pi}{4}+x)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \frac{\pi}{4}+x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq\frac{3\pi}{4}+k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin^4 2x+\cos^4 2x=\cos^4 2x \Leftrightarrow \sin^4 2x=0 \Leftrightarrow \sin 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm $x=\frac{k\pi}{2}, k\in Z$.

Bài 6: (ĐHMĐC-97). Giải phương trình:

$$\frac{\sin 5x}{5\sin x}=1.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện

$\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\pi, k\in Z.$

Biến đổi phương trình về dạng:

$\sin 5x=5\sin x \Leftrightarrow \sin 5x-\sin x=4\sin x \Leftrightarrow 2\cos 3x.\sin 2x=4\sin x$

$\Leftrightarrow 4\cos 3x.\sin x.\cos x=4\sin x \Leftrightarrow (\cos 3x.\cos x-1)\sin x=0 \Leftrightarrow \cos 3x.\cos x=1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x=1\\ \cos 3x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=-1\\ \cos 3x=-1\end{cases}\end{array}\right.$$ vi phạm điều kiện vì $\sin x\neq 0$.

Vậy, phương trình vô nghiệm.

Bài 7: (ĐHNN-98). Giải phương trình:

$$\frac{\cos x-2\sin x.\cos x}{2\cos^2 x-\sin x-1}=\sqrt{3}.$$

BÀI GIẢI

Ta có

$2\cos^2x-\sin x-1=-2\sin^2x-\sin x+1=(\sin x+1)(1-2\sin x).$

Điều kiện

$2\cos^2x+\sin x-1\neq 0 \Leftrightarrow (\sin x+1)(1-2\sin x)\neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\neq -1\\ \sin x\neq\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq -\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ x\neq\frac{5\pi}{6}+2k\pi\end{cases}, k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\cos x(1-2\sin x)}{(\sin x+1)(1-2\sin x)}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x=\sqrt{3}\sin x+\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x-\cos x=-\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x-\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \text{ loại} \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài 8: (ĐHL-98). Giải phương trình:

$$tgx-\sin2x-\cos2x+2(2\cos x-\frac{1}{\cos x})=0.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện

$$\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sin x}{\cos x}-2\sin x.\cos x-\cos2x+2(\frac{2\cos^2x-1}{\cos x})=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(\frac{1}{\cos x}-2\cos x)-\cos2x+\frac{2\cos2x}{\cos x}=0$$

$$\Leftrightarrow -\sin x.\frac{\cos2x}{\cos x}-\cos2x+\frac{2\cos2x}{\cos x}=0 \Leftrightarrow \frac{\cos2x}{\cos x}(-\sin x-\cos x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos2x=0 \\ \cos x+\sin x=2 \ \text{(vn)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài 9: (ĐHSP Vinh - 98): Giải phương trình:

$$1+\cot g2x=\frac{1-\cos2x}{\sin^2 2x}.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện

$$\sin2x\neq0 \Leftrightarrow 2x\neq k\pi \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in Z. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$1+\frac{\cos2x}{\sin2x}=\frac{1-\cos2x}{1-\cos^2 2x} \Leftrightarrow \frac{\cos2x+\sin2x}{\sin2x}=\frac{1}{1+\cos2x}$$

$$\Leftrightarrow (\cos2x+\sin2x)(1+\cos2x)=\sin2x$$

$$\Leftrightarrow \cos2x+\sin2x+(\cos2x+\sin2x)\cos2x=\sin2x$$

$$\Leftrightarrow (\cos2x+\sin2x+1)\cos2x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos2x=0 \\ \sqrt{2}\cos(2x-\frac{\pi}{4})=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos2x=0 \\ \cos(2x-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ 2x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

a. (Đề 124): $\frac{a^2}{1-tg^2x}=\frac{\sin^2x+a^2-2}{\cos2x}$.

b. (Đề 119): $\frac{1-\cos4x}{2\sin2x}=\frac{\sin4x}{1+\cos4x}$.

c. (ĐHY Hà Nội -95): $6\sin x-2\cos^3x=\frac{5\sin4x.\cos x}{2\cos2x}$.

d. (ĐHBK Hà Nội - 2000): $\frac{\sin^4x+\cos^4x}{\sin2x}=\frac{1}{2}(tgx+\cot gx)$.

Bài tập 2. Giải các phương trình sau:

a. (Đề 90): $\frac{\sin x+\sin2x+\sin3x}{\cos x+\cos2x+\cos3x}=\sqrt{3}$.

b. (Đề 99): $\frac{1+2\sin^2x-3\sqrt{2}\sin x+\sin2x}{2\sin x.\cos x-1}=1$.

c. (ĐHTM - 99): $2(\sin3x-\cos3x)=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$.

d. (Đề 121): $\frac{\sin^3x+\cos^3x}{2\cos x-\sin x}=\cos2x$.

e. (ĐHQG-97); $2\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$.

f. (Đề 62: $\frac{\sin^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{x}{2}}{1-\sin x}-tg^2x.\sin x=\frac{1}{2}(1+\sin x)+tg^2x$.

g. (Đề 45): $\frac{3(\cot g2x+\cos2x)}{\cot g2x-\cos2x}-2\sin2x=2$.

h. (ĐHBK Hà Nội - 98): $\frac{1}{tgx+\cot g2x}=\frac{\sqrt{2}(\cos x-\sin x)}{\cot gx-1}$.

i. (ĐHGTVT TPHCM - 98): $\frac{\cot g^2x-tg^2x}{\cos 2x}=16(1+\cos 4x)$.

Bài tập 3. Giải các phương trình sau:

a. (ĐHGTVT Hà Nội - 99): $\sin^4x+\cos^4x=\frac{7}{8}\text{cotg}(x+\frac{\pi}{3}).\text{cotg}(\frac{\pi}{6}-x)$.

b. $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin 2x}=\frac{2}{\sin 4x}$

Bài tập 4. Giải các phương trình sau:

a. $\cos 3x.tg5x=\sin 7x$.

b. $tg5x.tg2x=1$.

c. $\frac{3(\cos 2x+\cot g2x)}{\cot g2x-\cos 2x}-2\sin 2x=2$.

d. $\frac{\cos x}{\cos 3x}-\frac{\cos 5x}{\cos x}=8\sin x.\sin 3x$.

e. $3tg3x+\text{cotg}2x=2tgx+\frac{2}{\sin 4x}$

f. $6\sin x-2\cos^3x=\frac{5\sin 4x.\cos x}{2\cos 2x}$

g. $\sin^2x-\sin x+\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{\sin x}=0$

Bài tập 5. Tìm các nghiệm của phương trình

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=1-\sin x$$

thoả mãn điều kiện $\left|\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right|\le\frac{3\pi}{4}$

Bài tập 6. Tìm các nghiệm của phương trình:

$$\sin(x-\frac{\pi}{4})-\cos(x+\frac{3\pi}{4})=1$$

thoả mãn bất phương trình: $\frac{2\cos 7x}{\cos 3+\sin 3}>2^{\cos 2x}$

Bài tập 7. Tìm các nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos 7x)-\cos^2 2x+\sin^2 3x=0$$

thoả mãn điều kiện $|x|<2$

Bài tập 8. Tìm các nghiệm của phương trình

$$\frac{3\pi}{4}\sin(2x+\frac{5\pi}{2})-3\cos(x-\frac{7\pi}{2})=1+2\sin x$$

thoả mãn điều kiện $x\in(\frac{\pi}{2},3\pi)$

Bài tập 9. Tìm tổng các nghiệm thoả mãn $1\le x\le\pi$ của phương trình:

$$\cos 2x-tg^2x=\frac{\cos^2x-\cos^3x-1}{\cos^2x}.$$

CHỦ ĐỀ 10

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC HỖN HỢP CHỨA CÁC BIỂU THỨC ĐỐI XỨNG VỚI $\sin^{2n}x$ VÀ $\cos^{2n}x$

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Giải phương trình lượng giác hỗn hợp chứa các biểu thức đối xứng với $\sin^{2n}x$ và $\cos^{2n}x$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

Bước 2: Thực hiện việc khử biểu thức đối xứng với $\sin^{2n}x$ và $\cos^{2n}x$ dựa trên 2 hằng đẳng thức:

1. Với $n=2k$, $k\in N^*$ ta sử dụng

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

khi đó:

$$\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x.\cos^2x$$
$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$
$$=1-\frac{1}{2}(1-\cos^2 2x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 2x$$
$$=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\cos 4x.$$
$$\sin^4x-\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^2x-\cos^2x)=-\cos 2x.$$

2. Với $n=3k$, $k\in N^*$ ta sử dụng

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$
$$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$$

khi đó:

$$\sin^6x+\cos^6x=(\sin^2x+\cos^2x)^3-3(\sin^2x+\cos^2x)\sin^2x.\cos^2x$$
$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$
$$=1-\frac{3}{4}(1-\cos^2 2x)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 2x$$
$$=1-\frac{3}{8}(1-\cos 4x)=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x.$$

$$\sin^6x-\cos^6x=(\sin^2x-\cos^2x)^3+3(\sin^2x-\cos^2x)\sin^2x.\cos^2x$$
$$=-\cos^32x-\frac{3}{4}\sin^22x.\cos2x$$
$$=-\cos^32x-\frac{3}{4}(1-\cos^22x)\cos2x$$
$$=-\frac{1}{4}\cos^32x-\frac{3}{4}\cos2x.$$

Ví dụ 1: (ĐHTS - 97): Giải phương trình:

$$\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}=\sin2x.$$

Giải

Ta có:

$$\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}=(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2})(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})=\cos x.$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$\cos x=\sin2x \Leftrightarrow \cos x=2\sin x.\cos x \Leftrightarrow (1-2\sin x).\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ \cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 2: (ĐH Huế - 2001): Cho phương trình:

$$\sin^4x+\cos^4x=m.\sin2x-\frac{1}{2}. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với m=1.

b. CMR với mọi m thoả mãn |m|≥1 phương trình luôn có nghiệm.

Giải

Ta có:

$$\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x.\cos^2x=1-\frac{1}{2}\sin^22x$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$1-\frac{1}{2}\sin^22x=m.\sin2x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^22x+2m.\sin2x-3=0$$

Đặt t=sin2x, điều kiện |t|≤1.

Khi đó phương trình có dạng:

$$f(t)=t^2+2mt-3=0. \quad (2)$$

a. Với m=1, ta được:

$$t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-3 \text{ loại}\\ t=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin2x=1 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

b. Nhận xét rằng:

$$f(-1).f(1)=(1+2m-3)(1-2m-3)=-4(m^2-1)\le0 \text{ với } |m|\ge1$$

⇔ phương trình (2) luôn có nghiệm thuộc [-1, 1]

⇔ phương trình (1) luôn có nghiệm.

Ví dụ 3: Cho phương trình:

$$\sin^6x+\cos^6x=m\sin^22x. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với $m=\frac{1}{4}$.

b. Tìm m để phương trình có đúng 4 nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

Giải

Ta có:

$$\sin^6x+\cos^6x=(\sin^2x+\cos^2x)^3-3(\sin^2x+\cos^2x)\sin^2x.\cos^2x=1-\frac{3}{4}\sin^22x$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$1-\frac{3}{4}\sin^22x=m.\sin^22x \Leftrightarrow (4m+3)\sin^22x=4.$$

Đặt t=sin2x, điều kiện |t|≤1.

Khi đó phương trình có dạng:

$$(4m+3)t^2=4. \quad (2)$$

a. Với $m=\frac{1}{4}$, ta được:

$$4t^2=4 \Leftrightarrow t^2=1 \Leftrightarrow \sin^22x=1 \Leftrightarrow \cos2x=0 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

b. Với $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow 2x\in[-\pi,\pi]$.

Để phương trình (1) có đúng 4 nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

⇔ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt thoả mãn $-1<t_1<0<t_2<1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4m+3\neq0\\ \left|\frac{4}{4m+3}\right|<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq-\frac{3}{4}\\ |4m+3|>4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq-\frac{3}{4}\\ \left[\begin{array}{l}4m+3>4\\ 4m+3<-4\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>\frac{1}{4}\\ m<-\frac{7}{4}\end{array}\right.$$

Vậy với $m\in(-\infty,-\frac{7}{4})\cup(\frac{1}{4},+\infty)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 4: (HVKTMM - 99): Giải phương trình:

$$\sin^8x+\cos^8x=\frac{17}{32}.$$

Giải

Ta có:

$$\sin^8x+\cos^8x=(\sin^4x+\cos^4x)^2-2\sin^4x\cos^4x$$

$$=[(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x.\cos^2x]^2-\frac{1}{8}\sin^42x$$

$$=(1-\frac{1}{2}\sin^22x)^2-\frac{1}{8}\sin^42x=\frac{1}{8}\sin^42x-\sin^22x+1$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{1}{8}\sin^42x-\sin^22x+1=\frac{17}{32}\Leftrightarrow 4\sin^42x-32\sin^22x+15=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin^2 2x=\frac{1}{2}\\ \sin^2 2x=\frac{15}{2}\ \text{loại}\end{array}\right.\Leftrightarrow\frac{1}{2}(1-\cos4x)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos4x=0\Leftrightarrow 4x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4},k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Chú ý: Nếu bài toán chứa hai biểu thức đối xứng $\sin^kx+\cos^kx$ và $\sin^{k+2}x+\cos^{k+2}x$ có hệ số đối xứng, ta nên sử dụng phép biến đổi:

$$A(\sin^kx+\cos^kx)-A(\sin^{k+2}x+\cos^{k+2}x)=$$

$$=A(1-\sin^2x)\sin^kx+A(1-\cos^2x)\cos^kx$$

$$=A\cos^2x.\sin^kx+A\sin^2x.\cos^kx$$

$$=A\cos^2x.\sin^2x.\sin^{k-2}x+A\sin^2x.\cos^2x.\cos^{k-2}x$$

$$=\frac{A}{4}(\sin^{k-2}x+\cos^{k-2}x).\sin^22x.$$

Ví dụ 5: Cho phương trình:

$$2(\sin^4x+\cos^4x)-2(\sin^6x+\cos^6x)=m\sin2x.\qquad(1)$$

a. Giải phương trình với m=1.

b. Tìm m để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $[0,\pi]$.

Giải

Ta có:

$$VT=2(\sin^4x+\cos^4x)-2(\sin^6x+\cos^6x)=2(1-\sin^2x)\sin^4x+2(1-\cos^2x)\cos^4x$$

$$=2\cos^2x.\sin^2x.\sin^2x+2\sin^2x.\cos^2x.\cos^2x$$

$$=\frac{1}{2}(\sin^2x+\cos^2x).\sin^22x=\frac{1}{2}\sin^22x.$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{1}{2}\sin^22x=m\sin2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sin2x=0&(2)\\ \sin2x=2m&(3)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=k\pi\\ \sin2x=2m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{2}\\ \sin2x=2m\end{array}\right.$$

Như vậy với mọi m phương trình luôn có một họ nghiệm $x=\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$.

a. Với m=1, (3) vô nghiệm do đó phương trình chỉ có 1 họ nghiệm $x=\frac{k\pi}{2}$.

b. Theo biến đổi trên ta luôn có $x=\frac{k\pi}{2}\overset{x\in[0,\pi]}{\Rightarrow}x=\{0,\frac{\pi}{2},\pi\}$ - ba nghiệm.

Vậy điều kiện đầu bài là:

$$\left[\begin{array}{l}(3)\ \text{vô nghiệm}\\ (3)\Leftrightarrow(2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|2m|>1\\ 2m=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|m|>\frac{1}{2}\\ 2m=0\end{array}\right..$$

Chú ý: Nếu bài toán chứa hai biểu thức đối xứng $A(\sin^kx+\cos^kx)$ và $B(\sin^{k+2}x+\cos^{k+2}x)$ có -B=2A, ta nên sử dụng phép biến đổi:

$$A(\sin^kx+\cos^kx)-2A(\sin^{k+2}x+\cos^{k+2}x)$$

$$=A(1-2\sin^2x)\sin^kx+A(1-2\cos^2x)\cos^kx$$

$$=A\cos2x.\sin^kx-A\cos2x.\cos^kx=A(\sin^kx-\cos^kx).\cos2x.$$

Ví dụ 6: (HVKTQS - 99): Giải phương trình:

$$2\sin^3x-\sin x=2\cos^3x-\cos x+\cos2x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(2\sin^2x-1)\sin x=(2\cos^2x-1)\cos x+\cos2x$$

$$\Leftrightarrow-\cos2x.\sin x=\cos2x.\cos x+\cos2x\Leftrightarrow(\sin x+\cos x+1)\cos2x=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=-1\\ \cos2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin(x+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \cos2x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+2k\pi\\ 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ x=\pi+2k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right.,k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 7: Cho phương trình:

$$\sin^8x+\cos^8x-2(\sin^{10}x+\cos^{10}x)=m\cos2x. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m=\frac{7}{3}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$.

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned}VT&=(1-2\sin^2x)\sin^8x+(1-2\cos^2x)\cos^8x\\&=\cos2x.\sin^8x-\cos2x.\cos^8x=(\sin^8x-\cos^8x).\cos2x\\&=(\sin^4x-\cos^4x)(\sin^4x+\cos^4x).\cos2x\\&=(\sin^2x-\cos^2x)(\sin^2x+\cos^2x)[(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x.\cos^2x].\cos2x\\&=-(1-\frac{1}{2}\sin^22x).\cos^22x=-[1-\frac{1}{2}(1-\cos^22x)].\cos^22x\\&=-\frac{1}{2}(1+\cos^22x).\cos^22x.\end{aligned}$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$-\frac{1}{2}(1+\cos^22x).\cos^22x=m\cos2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos2x=0 & (2)\\ \cos^32x+\cos2x+2m=0 & (3)\end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Như vậy với mọi m phương trình luôn có một họ nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$.

Giải (2): Đặt $t=\cos2x$, điều kiện $|t|\le1$, ta được:

$$t^3+t=-2m. \qquad (4)$$

a. Với $m=\frac{7}{3}$, ta được:

$$t^3+t=-\frac{14}{3},$$ phương trình này vô nghiệm bởi $VT\ge-2$.

b. Để phương trình có nghiệm $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y=-2m$ cắt phần đồ thị hàm số $y=t^3+t$ lấy trên miền $D=[-1, 1]\backslash\{0\}$.

Xét hàm số $y=t^3+t$ lấy trên miền $D=[-1, 1]\backslash\{0\}$.

Đạo hàm:

$y'=3t^2+1>0, \forall t\in D \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến.

Do đó điều kiện là:

$$\begin{cases}f(-1)\le-2m\le f(1)\\-2m\neq f(0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le-2m\le2\\-2m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le m\le1\\m\neq0\end{cases}.$$

Vậy, với $m\in[-1, 1]\backslash\{0\}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 8: (ĐHBK Hà Nội - 99) Với n là số tự nhiên lớn hơn 2, tìm $x\in(0, \frac{\pi}{2})$ thoả mãn phương trình:

$$\sin^nx+\cos^nx=2^{\frac{2-n}{2}}.$$

Giải

Xét hàm số $f(x)=\sin^nx+\cos^nx$.

Miền xác định $D=(0, \frac{\pi}{2})$.

Đạo hàm:

$$y'=n\cos x\sin^{n-1}x-n\sin x\cos^{n-1}x=n\sin x.\cos x(\sin^{n-2}x-\cos^{n-2}x),$$

$$y'=0\Leftrightarrow \sin x.\cos x(\sin^{n-2}x-\cos^{n-2}x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}.$$

Bảng biến thiên

$$\begin{array}{c|ccccc}x & 0 & & \pi/4 & & \pi/2\\\hline y' & & - & 0 & + & \\\hline y & 1 & \searrow & 2^{\frac{2-n}{2}} & \nearrow & 1\end{array}$$

Từ bảng biến thiên, suy ra: $\sin^nx+\cos^nx=2^{\frac{2-n}{2}}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (ĐHXD - 97): Giải phương trình:

$$\frac{\sin^42x+\cos^42x}{tg(\frac{\pi}{4}-x).tg(\frac{\pi}{4}+x)}=\cos^44x.$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$$tg(\frac{\pi}{4}-x).tg(\frac{\pi}{4}+x)=tg(\frac{\pi}{4}-x).cotg(\frac{\pi}{4}-x)=1.$$

Do đó điều kiện có nghĩa của phương trình là:

$$\begin{cases}\cos(\frac{\pi}{4}-x)\neq0\\\cos(\frac{\pi}{4}+x)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{4}-x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\\frac{\pi}{4}+x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-\frac{\pi}{4}-k\pi\\x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z$$

Phương trình được viết lại dưới dạng:

$$(\sin^22x+\cos^22x)^2-2\sin^22x.\cos^22x=\cos^44x\Leftrightarrow1-\frac{1}{2}\sin^24x=\cos^44x$$

$$\Leftrightarrow1-\frac{1}{2}(1-\cos^24x)=\cos^44x\Leftrightarrow2\cos^44x-\cos^24x-1=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos^22x=1\\\cos^22x=-\frac{1}{2}\text{ loại}\end{array}\right.\Leftrightarrow\sin2x=0\Leftrightarrow2x=k\pi\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Bài 2: (HVBCVT TPHCM - 2001): Cho phương trình:

$$\sin^6x+\cos^6x=m.\sin2x. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=1.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

BÀI GIẢI

Ta có:

$$\sin^6x+\cos^6x=(\sin^2x+\cos^2x)^3-3(\sin^2x+\cos^2x)\sin^2x.\cos^2x=1-\frac{3}{4}\sin^22x$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$1-\frac{3}{4}\sin^22x=m.\sin2x \Leftrightarrow 3\sin^22x+4m\sin2x-4=0.$$

Đặt t=sin2x, điều kiện $|t|\le1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$3t^2+4mt-4=0. \qquad (2)$$

a. Với m=1, ta được:

$$3t^2+4t-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \text{ loại} \\ t=\frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin2x=\frac{2}{3}=\sin2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=2\alpha+2k\pi \\ 2x=\pi-2\alpha+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}-\alpha+k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Phương trình (1) có nghiệm ⇔ (2) có nghiệm thuộc [-1, 1]

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \text{ có 1 nghiệm thuộc } [-1,1] \\ (2) \text{ có 2 nghiệm thuộc } [-1,1] \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-1).f(1)\le0 \\ \begin{cases} \Delta'\ge0 \\ af(-1)\ge0 \\ af(1)\ge0 \\ -1\le\frac{S}{2}\le1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (4m-1)(-4m-1)\le0 \\ \begin{cases} 4m^2+12\ge0 \\ 4m-1\ge0 \\ -4m-1\ge0 \\ -1\le\frac{2m}{3}\le1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow |m|\ge\frac{1}{4}.$$

Vậy với $|m|\ge\frac{1}{4}$ phương trình có nghiệm.

Cách 2: Vì t=0 không phải là nghiệm của (2) nên phương trình được viết lại:

$$\frac{4-3t^2}{t}=4m.$$

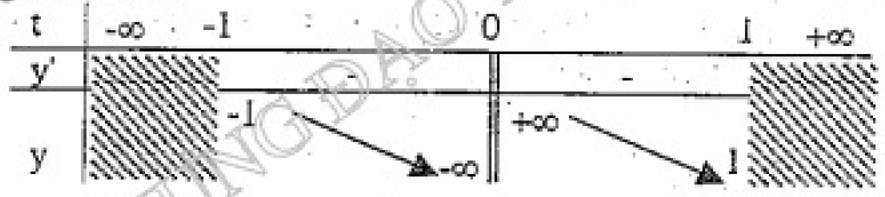
Phương trình (1) có nghiệm ⇔ đường thẳng y=4m cắt đồ thị hàm số $y=\frac{4-3t^2}{t}$ trên đoạn [-1, 1].

Xét hàm số $y=\frac{4-3t^2}{t}$ trên đoạn [-1, 1].

Đạo hàm

$$y'=\frac{-4-3t^2}{t^2}<0 \Rightarrow \text{hàm số nghịch biến trên } [-1, 1].$$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l} 4m\le-1 \\ 4m\ge1 \end{array}\right. \Leftrightarrow |m|\ge\frac{1}{4}.$$

Vậy với $|m|\ge\frac{1}{4}$ phương trình có nghiệm.

Bài 3: (ĐHQG TPHCM - 97): Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$4(\sin^4x+\cos^4x)-4(\sin^6x+\cos^6x)-\sin^24x=m. \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$$\sin^6x+\cos^6x=(\sin^2x+\cos^2x)^3-3(\sin^2x+\cos^2x)\sin^2x.\cos^2x=1-\frac{3}{4}\sin^22x$$

$$\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x.\cos^2x=1-\frac{1}{2}\sin^22x$$

$$\sin^24x=4\sin^22x.\cos^22x=4\sin^22x.(1-\sin^22x)=4\sin^22x.-4\sin^42x$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$4(1-\frac{3}{4}\sin^22x)-4(1-\frac{1}{2}\sin^22x)-(4\sin^22x-4\sin^42x)=m$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^42x-3\sin^22x=m$$

Đặt $t=\sin^22x$, điều kiện $0\le t\le1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$4t^2-3t=m. \qquad (2)$$

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

ách 1: Phương trình (1) có nghiệm ⇔ (2) có nghiệm thuộc [0, 1]

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \text{ có 1 nghiệm thuộc } [0,1] \\ (2) \text{ có 2 nghiệm thuộc } [0,1] \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0).f(1)\le 0 \\ \begin{cases} \Delta'\ge 0 \\ af(0)\ge 0 \\ af(1)\ge 0 \\ 0\le \dfrac{S}{2}\le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m(1-m)\le 0 \\ \begin{cases} 9+16m\ge 0 \\ -m\ge 0 \\ 1-m\ge 0 \\ 0\le \dfrac{3}{8}\le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le m\le 1 \\ -\dfrac{9}{16}\le m\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{9}{16}\le m\le 1.$$

Vậy với $-\frac{9}{16}\le m\le 1$ phương trình có nghiệm.

Cách 2: Phương trình (1) có nghiệm

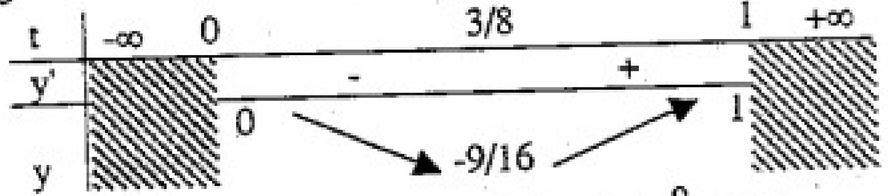
$\Leftrightarrow$ đường thẳng y=m cắt đồ thị hàm số $y=4t^2-3t$ trên đoạn [0, 1].

Xét hàm số $y=4t^2-3t$ trên đoạn [0, 1].

Đạo hàm

$$y'=8t-3,\ y'=0 \Leftrightarrow t=\frac{3}{8}.$$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là $-\frac{9}{16}\le 0\le 1$

Vậy với $-\frac{9}{16}\le m\le 1$ phương trình có nghiệm.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải phương trình:

a. $4(\sin^4x+\cos^4x)+\sqrt{3}\sin 4x=2$.

b. (ĐHCĐ Hà Nội - 2001): $\sin^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{x}{2}=1-2\sin x$.

c. (ĐHGT Hà Nội - 99): $\sin^4x+\cos^4x=\frac{7}{8}\text{cotg}(x+\frac{\pi}{3}).\text{cotg}(\frac{\pi}{6}-x)$.

Bài tập 2. Giải phương trình:

a. (HVNH-98): $\sin^6x+\cos^6x=\cos 4x$.

b. (ĐH Huế - 99): $\sin^6x+\cos^6x=\frac{7}{16}$.

c. (HVQY - 97): $\sin^8x+\cos^8x=\frac{1}{8}$.

Bài tập 3. Giải phương trình:

a. (ĐHNT Hà Nội - 2000): $\sin^8x+\cos^8x=2(\sin^{10}x+\cos^{10}x)+\frac{5}{4}\cos 2x$.

b. (ĐHQG Hà Nội - 98): $\sin^3x+\cos^3x=2(\sin^5x+\cos^5x)$.

CHỦ ĐỀ 11

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC HỖN HỢP CHỨA CÁC BIỂU THỨC ĐỐI XỨNG VỚI TANG VÀ COTG

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Giải phương trình lượng giác hỗn hợp chứa các biểu thức đối xứng với tg và cotg

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

Bước 2: Chuyển phương trình về sin và cos để giải.

Thông thường ở bước này ta thường sử dụng các công thức biến đổi sau:

1. $\text{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ 1. $\text{cotg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$

2. $\text{tg}x\pm\text{tg}y=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x.\cos y}$ 2. $\text{cotg}x\pm\text{cotg}y=-\frac{\sin(x\pm y)}{\sin x.\sin y}$

3. $\text{tg}(x\pm y)=\frac{\text{tg}x\pm\text{tg}y}{1\mp\text{tg}x.\text{tg}y}$ 3. $\text{cotg}(x\pm y)=\frac{\text{cotg}x.\text{cotg}y\mp 1}{\text{cotg}x\pm\text{cotg}y}$

ngoài ra còn có:

$$\text{tg}x+\text{cotg}x=\frac{2}{\sin 2x}\quad \&\quad \text{tg}x-\text{cotg}x=-2\text{cotg}2x.$$

i dụ 1: Giải phương trình:

$$\text{cotg}x-\text{tg}x=2\text{tg}2x$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x\ne 0\\ \sin x\ne 0\\ \cos 2x<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x\ne 0\\ \cos 2x<0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 4x\ne 0 \Leftrightarrow 4x\ne k\pi \Leftrightarrow x\ne\frac{k\pi}{4},\ k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\text{cotg}2x=2\text{tg}2x \Leftrightarrow \text{cotg}2x=\text{tg}2x \Leftrightarrow \text{cotg}2x=\text{cotg}(\frac{\pi}{2}-2x)$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}-2x+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4},\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$m(tgx+cotgx)=2(2+\sin 2x).$$

a. Giải phương trình với m=3.

b. Tìm m để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $(0, \pi)$.

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow 2x\neq k\pi \Leftrightarrow x\neq \frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{2m}{\sin 2x}=2(2+\sin 2x) \Leftrightarrow \sin^2 2x+2\sin 2x-m=0.$$

Đặt $t=\sin 2x$, điều kiện $|t|\le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t^2+2t-m=0. \qquad (2)$$

a. Với m=3, ta được:

$$t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x=1$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy với m=3 phương trình có một họ nghiệm.

b. Với $x\in(0, \pi) \Leftrightarrow 2x\in(0, 2\pi)$

do đó để phương trình (1) có đúng 3 nghiệm thuộc $(0, \pi)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2)\text{ có nghiệm } -1=t_1<t_2<1\\ (2)\text{ có nghiệm } -1<t_1<t_2=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(-1)=0\\ \Delta'>0\\ af(1)>0\end{cases}\\ \begin{cases}f(1)=0\\ \Delta'>0\\ af(-1)>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1-m=0\\ 1+m>0\\ 3-m>0\end{cases}\\ \begin{cases}3-m=0\\ 1+m>0\\ -1-m>0\end{cases}\end{array}\right. \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy không tồn tại m để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $(0, \pi)$.

Chú ý: Với các phương trình mà sự hiện diện của tg và cotg không đối xứng khi đó ta cần linh hoạt biến đổi dựa trên phương pháp luận về hệ số cho phé tách. Cụ thể ta đi xem xét ví dụ sau:

(Đề 97): Giải phương trình:

$$6tgx+5cotg3x=tg2x.$$

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin 3x\neq 0\\ \cos 2x<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi\\ 3x\neq k\pi\\ 2x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq \frac{k\pi}{3}\\ x\neq \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\end{cases}, k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$5(tgx+cotg3x)=tg2x-tgx$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right)=\frac{\sin x}{\cos 2x.\cos x} \Leftrightarrow \frac{5\cos 2x}{\cos x.\sin 3x}=\frac{\sin x}{\cos 2x.\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 5\cos^2 2x=\sin 3x.\sin x \Leftrightarrow 5\cos^2 2x=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)$$

$$\Leftrightarrow 10\cos^2 2x=\cos 2x-(2\cos^2 2x-1) \Leftrightarrow 12\cos^2 2x-\cos 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=\frac{1}{3}=\cos 2\alpha\\ \cos 2x=-\frac{1}{4}=\cos 2\beta\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\pm 2\alpha+2k\pi\\ 2x=\pm 2\beta+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\alpha+k\pi\\ x=\pm\beta+k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có bốn họ nghiệm

Chú ý: Nhiều bài toán đòi hỏi các em học sinh ngoài việc sử dụng phương pháp luận về hệ số còn phải thật linh hoạt trong phép biến đổi toàn cục hoặc cục bộ để chuyển đổi phương trình ban đầu về dạng đơn giản hơn, cụ thể ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 4: (ĐHQG Hà Nội -98): Giải phương trình:

$$2tgx+cotg2x=2\sin 2x+\frac{1}{\sin 2x}.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin 2x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow 2x\neq k\pi \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$tgx+(tgx+cotg2x)=2\sin 2x+\frac{1}{\sin 2x} \Leftrightarrow tgx+\frac{\cos x}{\sin 2x.\cos x}=2\sin 2x+\frac{1}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=4\sin x.\cos x \Leftrightarrow 4\cos^2 x=1 \Leftrightarrow 2(1+\cos 2x)=1 \Leftrightarrow \cos 2x=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 5: Giải phương trình:

$$3tg2x-4tg3x=tg^2 3x.tg2x.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos 2x \neq 0\\ \cos 3x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ 3x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x \neq \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}\end{cases}, k\in Z. \qquad (I)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3(tg2x-tg3x)=tg3x+tg^2 3x.tg2x \Leftrightarrow 3(tg2x-tg3x)=(1+tg3x.tg2x)tg3x \ (*)$$

Nếu 1+tg3x.tg2x=0 thì (*) tương đương với

$$\begin{cases}1+tg3x.tg2x=0\\ tg2x-tg3x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+tg^2 3x=0\\ tg2x=tg3x\end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

$$\Rightarrow 1+tg3x.tg2x\neq 0$$

do đó

$$(*) \Leftrightarrow \frac{3(tg2x-tg3x)}{1+tg3x.tg2x}=tg3x \Leftrightarrow -3tgx=\frac{3tgx-tg^3 x}{1-3tg^2 x} \Leftrightarrow 5tg^3x-3tgx=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tgx=0\\ tg^2 x=\dfrac{3}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tgx=0\\ tgx=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{5}=tg(\pm\alpha)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\pm\alpha+k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Chú ý: Trong lời giải trên để làm xuất hiện công thức $\dfrac{tg2x-tg3x}{1+tg3x.tg2x}$ ta đã phải xét hai trường hợp 1+tg3x.tg2x=0 và 1+tg3x.tg2x≠0, kiểu biến đổi này trong nhiều bài toán sẽ rất cồng kềnh, do vậy để tránh trường hợp mất nghiệm các em học sinh nên quy phương trình về sin, cos để biến đổi, cụ thể:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{3\sin(2x-3x)}{\cos 2x.\cos 3x}=(1+\frac{\sin 3x}{\cos 3x}.\frac{\sin 2x}{\cos 2x})tg3x$$

$$\Leftrightarrow -3\sin x=(\cos 3x.\cos 2x+\sin 3x.\sin 2x).\frac{\sin 3x}{\cos 3x}$$

$$\Leftrightarrow -3\cos 3x.\sin x=\cos x.\sin 3x \Leftrightarrow -\frac{3}{2}(\sin 4x-\sin 2x)=\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=2\sin 4x \Leftrightarrow \sin 2x=2\sin 4x \Leftrightarrow \sin 2x=4\sin 2x.\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ 1=4\cos 2x\end{array}\right. \overset{(I)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos 2x=\dfrac{1}{4}=\cos 2\alpha\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\pm\alpha+k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Chú ý: Như chúng ta đã thấy trong các ví dụ trên, công việc trước tiên luôn là đặt điều kiện để phương trình có nghĩa, tuy nhiên đối với một số phương trình phân thức các em học sinh nên có thói quen biến đổi mẫu số trước khi thiết lập điều kiện có nghĩa cho phương trình. Cụ thể ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 6: (ĐHBK Hà Nội - 98): Giải phương trình:

$$\frac{1}{tgx+\cot g2x}=\frac{\sqrt{2}(\cos x-\sin x)}{\cot gx-1}.$$

Giải

Ta có:

$$tgx+cotg2x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{\cos x}{\sin 2x.\cos x}=\frac{1}{\sin 2x}.$$

$$cotgx-1=\frac{\cos x}{\sin x}-1=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x}.$$

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin 2x\neq 0\\ \cot gx-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x\neq 0\\ \cot gx\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x\neq k\pi\\ x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq\dfrac{k\pi}{2}\\ x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{cases}. \qquad (I)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 2x=\sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow 2\sin x.\cos x=\sqrt{2}\sin x \overset{(I)}{\Leftrightarrow} \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \overset{(I)}{\Leftrightarrow} x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Chú ý: Như chúng ta đã thấy với các phương trình có chứa tang, cotg và sin , cos ta thường biến đổi:

$$tgx=\frac{\sin x}{\cos x} \ \& \ cotgx=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

Ví dụ 7: (ĐHQG Hà Nội - 95): Giải phương trình:

$$(1-\sin^3x)tg^2x+(\cos^3x-1)=0.$$

Giải

Điều kiện $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z. \qquad (*)$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1-\sin^3x)\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+(\cos^3x-1)=0 \Leftrightarrow (1-\sin^3x)\sin^2x+(\cos^3x-1)\cos^2x=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin^3x)(1-\cos^2x)+(\cos^3x-1)(1-\sin^2x)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin x)(1-\cos x)[(1+\sin x+\sin^2x)(1+\cos x)-$$
$$-(\cos^2x+\cos x+1)(1+\sin x)]=0$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} (1-\cos x)[(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)\sin x.\cos x]=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x+\sin x.\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x=1 & (1)\\ \sin x-\cos x=0 & (2)\\ \sin x+\cos x+\sin x.\cos x=0 & (3)\end{array}\right.$$

__Giải (1)__: Ta được x=2kπ, k∈Z

__Giải (2)__: Ta được $tgx=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$

Giải (3): Đặt sinx+cosx=t, điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$, suy ra sinx.cosx=$\frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t+\frac{t^2-1}{2}=0 \Leftrightarrow t^2+2t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1+\sqrt{2} \\ t=-1-\sqrt{2}\ \text{loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x+\cos x=\sqrt{2}-1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\alpha+2k\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\pi-\alpha+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha-\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x=\frac{3\pi}{4}-\alpha+2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có bốn họ nghiệm.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (ĐHGT - 95): Giải phương trình:
tg2x+cotgx=8cos²x.

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos 2x\ne 0 \\ \sin x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x\ne k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \\ x\ne k\pi \end{cases}, k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\frac{\cos x}{\sin x}=8\cos^2 x \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\cos 2x.\sin x}=8\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow (8\sin x.\cos x.\cos 2x-1)\cos x=0 \Leftrightarrow (2\sin 4x-1)\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x=\frac{1}{2} \\ \cos x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ 4x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}, k\in Z.$$

Bài 2: (ĐHNT TPHCM - 97): Giải phương trình:

$$2tgx+cotgx=\sqrt{3}+\frac{2}{\sin 2x}.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x\ne 0 \\ \sin x\ne 0 \\ \sin 2x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x\ne 0 \Leftrightarrow 2x\ne k\pi \Leftrightarrow x\ne\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$tgx+(tgx+cotgx)=\sqrt{3}+\frac{2}{\sin 2x} \Leftrightarrow tgx+\frac{2}{\sin 2x}=\sqrt{3}+\frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow tgx=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm

Bài 3: (ĐHQG TPHCM - 96): Giải phương trình:
tg²x-tgx.tg3x=2.

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x\ne 0 \\ \cos 3x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 3x\ne 0 \Leftrightarrow 3x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\ne\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}, k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(tgx-tg3x)tgx=2 \Leftrightarrow -\frac{\sin 2x}{\cos x.\cos 3x}.\frac{\sin x}{\cos x}=2$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x=2\cos 3x.\cos x \Leftrightarrow -2\sin^2 x=\cos 4x+\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow -(1-\cos 2x)=\cos 4x+\cos 2x \Leftrightarrow \cos 4x=-1$$

$$\Leftrightarrow 4x=\pi+2k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Bài 4: (ĐHD - 2001): Giải phương trình:
tg²x.cotg²2x.cotg3x=tg²x-cotg²2x+cotg3x.

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x\ne 0 \\ \sin 2x\ne 0 \\ \sin 3x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x\ne 0 \\ \sin 3x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\ne k\pi \\ 3x\ne k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne\frac{k\pi}{2} \\ x\ne\frac{k\pi}{3} \end{cases}, k\in Z. \qquad (I)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$cotg^2 2x-tg^2 x=(1-tg^2 x.cotg^2 2x).cotg3x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x.\cos^2 x-\sin^2 2x.\sin^2 x=(\sin^2 2x.\cos^2 x-\cos^2 2x.\sin^2 x).cotg3x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x.\cos x=\sin 3x.\sin x.\frac{\cos 3x}{\sin 3x}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 3x=0 \\ \cos x=\sin x \end{array}\right. \overset{(I)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} 4\cos^2 x-3=0 \\ \cos x=\sin x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=\frac{1}{2} \\ tgx=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Bài 5: (Đề 71): Giải phương trình:

$$3tg3x+cotg2x=2tgx+\frac{2}{\sin 4x}.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos 3x \neq 0\\ \sin 2x \neq 0\\ \cos x \neq 0\\ \sin 4x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 3x \neq 0\\ \sin 4x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\\ 4x \neq k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\\ x \neq \frac{k\pi}{4}\end{cases}, k\in Z. \quad (I)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2(tg3x-tgx)+(tg3x+cotg2x)=\frac{2}{\sin 4x} \Leftrightarrow \frac{2\sin 2x}{\cos 3x.\cos x}+\frac{\cos x}{\cos 3x.\sin 2x}=\frac{2}{\sin 4x}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin4x.\sin x+2\cos2x.\cos x=2\cos3x$$

$$\Leftrightarrow 4\sin4x.\sin x+\cos3x+\cos x=2\cos3x \Leftrightarrow 4\sin4x.\sin x=\cos3x-\cos x$$

$$\Leftrightarrow 8\sin2x.\cos2x.\sin x=-2\sin2x.\sin x \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \cos2x=-\frac{1}{4}=\cos2\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2x=\pm2\alpha+2k\pi \Leftrightarrow x=\pm\alpha+k\pi, k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm

Bài 6: (ĐHTL TPHCM - 2001): Giải phương trình:

$$tgx-3cotgx=4(\sin x+\sqrt{3}\cos x).$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin2x\neq0 \Leftrightarrow 2x\neq k\pi \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in Z. \quad (I)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{3\cos x}{\sin x}=4(\sin x+\sqrt{3}\cos x) \Leftrightarrow \sin^2x-3\cos^2x=2(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\sin2x$$

$$\Leftrightarrow [2\sin2x-(\sin x-\sqrt{3}\cos x)](\sin x+\sqrt{3}\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow [\sin2x-(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)](\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow [\sin2x-\sin(x-\frac{\pi}{3})].\sin(x+\frac{\pi}{3})=0$$

Bạn đọc tự giải tiếp.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình:

a. $tgx+cotgx=2(\sin2x+\cos2x)$

b. $2(cotg2x-cotg3x)=tg2x+cotg3x.$

c. $tg2x + cotg2x = 2\sin4x.$

d. $2cotg2x - 3cotg3x = tg2x$

Bài tập 2. Cho phương trình:

$$\frac{2}{\sin^2 x}+2tg^2x+(2m+3)(tgx+cotgx)+4=0$$

a. Giải phương trình khi m=1

b. Xác định m để phương trình có nghiệm.

CHỦ ĐỀ 12

CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

MỞ ĐẦU

Các phương trình lượng giác rất đa dạng không thể có một công thức chung nào để giải mọi phương trình lượng giác. bởi vậy cần thiết sử dụng các phép biến đổi lượng giác thông thường để đưa phương trình ban đầu về các dạng cơ bản. Chúng ta đưa ra một nguyên tắc chung thường dùng khi giải phương trình lượng giác.

Thông thường phải thực hiện các việc sau:

- Nếu phương trình chứa nhiều hàm lượng giác khác nhau thì biến đổi tương đương về phương trình chỉ chứa một hàm.
- Nếu phương trình chứa các hàm lượng giác của nhiều cung khác nhau thì biến đổi tương đương về phương trình chỉ chứa các hàm lượng giác của một cung.

Sau khi biến đổi như trên nếu phương trình nhận được không có dạng quen thuộc thì có thể đi theo hai hướng:

Hướng thứ nhất:

Biến đổi phương trình đã cho để đưa về việc giải các phương trình đơn giản quen thuộc. Các phương pháp biến đổi theo hướng này gồm có:

Phương pháp đặt ẩn phụ

Để đưa phương trình về việc giải một phương trình đại số.

Thí dụ: Giải phương trình

$$2\cos^2x=\sin x+1$$

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin^2x+\sin x-1=0.$$

Đặt $t=\sin x$ điều kiện $|t|\leq1$, ta được

$$2t^2+t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=-1/2\end{array}\right.$$

Phương pháp hạ bậc

Nếu phương trình cần giải có bậc cao thì dùng công thức hạ bậc để biến đổi về bậc thấp hơn.

Thí dụ: Giải phương trình

$$\sin^23x-\sin^22x-\sin^2x=0.$$

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1-\cos6x}{2}-\sin^22x-\frac{1-\cos2x}{2}=0 \Leftrightarrow (\cos6x-\cos2x)+2\sin^22x=0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin4x.\sin2x+2\sin^22x=0 \Leftrightarrow -2\sin2x(\sin4x-\sin2x)=0$$

$$\Leftrightarrow -4\sin2x.\cos3x.\sin x=0.$$

Phương pháp biến đổi thành phương trình tích.

Thí dụ: Giải phương trình

$$\sin 2x+\sin 4x=2\cos x$$

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin 3x.\cos x=2\cos x \Leftrightarrow 2\cos x(\sin 3x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin 3x=1\end{array}\right.$$

Phương pháp tổng các số hạng không âm.

Thí dụ: Giải phương trình

$$2\sin^2 x-2\sqrt{2}\sin x+3tg^2 2x-2\sqrt{3}\,tg2x+2=0$$

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sqrt{2}\sin x-1)^2+(\sqrt{3}\,tg2x-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ tg2x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}.$$

Phương pháp đánh giá dùng để giải các phương trình không mẫu mực.

Thí dụ: Giải phương trình

$$\cos x.\cos 2005x=1.$$

Lời giải

Ta có $|\cos x|\le 1$ & $|\cos 2005x|\le 1$.

Suy ra phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases}\cos x=-1\ \&\ \cos 2005x=-1\\ \cos x=1\ \&\ \cos 2005x=1\end{cases} \Leftrightarrow x=k\pi.$$

Phương pháp hàm số : sử dụng các tính chất của hàm số để giải phương trình.

Thí dụ: Giải phương trình:

$$2^{\cos x}-2^{\sin x}=\sin x-\cos x.$$

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2^{\cos x}+\cos x=2^{\sin x}+\sin x.$$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t$ đồng biến trên R.

Vậy, phương trình được viết dưới dạng:

$$f(\cos x)=f(\sin x) \Leftrightarrow \cos x=\sin x \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$$

Hướng thứ hai:

Dùng lập luận khẳng định phương trình cần giải là vô nghiệm.

Thí dụ: Giải phương trình

$$\sin 2x-\cos 2x=tgx+cotgx \qquad (1)$$

Lời giải

- Vế trái của (1) ta có $|\sin 2x-\cos 2x|\le\sqrt{2}$.
- Vế phải của (1) ta có: $|tgx+cotgx|\ge 2$.

Vậy phương trình (1) là vô nghiệm.

BÀI TOÁN 1

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

I.PHƯƠNG PHÁP

Chúng ta thực chất đã làm quen với phương pháp đặt ẩn phụ để giải phương trình lượng giác trong các chủ đề

- Phương trình bậc 2 và bậc cao đối với một hàm số lượng giác.
- Phương trình đẳng cấp bậc 2 và bậc cao đối với sin và cos.
- Phương trình đối xứng.

trong bài toán này chúng ta xét thêm những trường hợp khác, bao gồm:

1 Mọi phương trình lượng giác đều có thể thực hiện việc đại số hoá thông qua hàm tg, cụ thể nếu đặt t=tgx thì:

$$cotgx=\frac{1}{t},$$

$$\sin 2x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos 2x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ tg2x=\frac{2t}{1-t^2}$$

2 Đặt $t=\dfrac{1}{\sin x}$ hoặc $t=\dfrac{1}{\cos x}$, điều kiện $|t|\ge 1$.

3 Đặt $t=a.\sin x+b.\cos x$, điều kiện $|t|\le\sqrt{a^2+b^2}$.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$cotgx=tgx+2tg2x.$$

Giải

Điều kiện

$$\begin{cases}\sin x\ne 0\\ \cos x\ne 0\\ \cos 2x\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x\ne 0\\ \cos 2x\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 4x\ne 0 \Leftrightarrow 4x\ne k\pi \Leftrightarrow x\ne\frac{k\pi}{4},\ k\in Z.$$

Cách 1: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ

Đặt t=tgx, suy ra $cotgx=\dfrac{1}{t}$ & $tg2x=\dfrac{2t}{1-t^2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$\frac{1}{t}=t+\frac{4t}{1-t^2} \Leftrightarrow 1-t^2=t^2(1-t^2)+4t^2$$

$$\Leftrightarrow t^4-6t^2+1=0 \Leftrightarrow (t^2-1)^2=4t^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t^2-1=2t\\ t^2-1=-2t\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t^2-2t-1=0\\ t^2+2t-1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \pm \sqrt{2} \\ t = -1 \pm \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = 1-\sqrt{2} = tg\alpha_1 \\ tgx = 1+\sqrt{2} = tg\alpha_2 \\ tgx = -1-\sqrt{2} = tg\alpha_3 \\ tgx = -1+\sqrt{2} = tg\alpha_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha_1 + k\pi \\ x = \alpha_2 + k\pi \\ x = \alpha_3 + k\pi \\ x = \alpha_4 + k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy, phương trình có bốn họ nghiệm.

Cách 2: Sử dụng phương pháp luận hệ số để phân tích

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\text{cotgx-tg2x=tgx+tg2x} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos x.\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x.\cos x - \sin 2x.\sin x)\cos x = \sin 3x.\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x.\cos x - \sin 3x.\sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Nhận xét: Thông qua 2 cách giải trên các em học sinh cần lưu ý rằng với nhiều phương trình lượng giác phương pháp giải chính quy đôi khi không tỏ ra hiệu quả.

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$4tg^2x + \frac{4m}{\cos x} + 5 = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=-1.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Giải

Điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in Z.$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$4(\frac{1}{\cos^2 x} - 1) + \frac{4m}{\cos x} + 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\cos^2 x} + \frac{4m}{\cos x} + 1 = 0$$

Đặt $t = \frac{2}{\cos x}$, điều kiện |t|≥2, khi đó phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 + 2mt + 1 = 0. \qquad (2)$$

a. Với m=-1, ta được:

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ (loại)}.$$

Vậy, với m=-1 phương trình vô nghiệm.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau :

Cách 1: Phương trình (1) có nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

⇔ Phương trình (2) có nghiệm t≥2

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2)\text{ co nghiem } t_1 \le 2 \le t_2 \\ (2)\text{ co nghiem } 2 \le t_1 \le t_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} af(2) \le 0 \\ \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ af(2) \ge 0 \\ S/2 \ge 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m+5 \le 0 \\ \begin{cases} m^2 - 1 \ge 0 \\ 4m+5 \ge 0 \\ -m \ge 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \le -\frac{5}{4}$$

Vậy, với $m \le -\frac{5}{4}$ phương trình đã cho có nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Cách 2: Phương trình (1) có nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

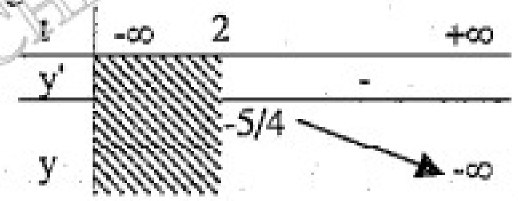
⇔ đường thẳng y=m cắt phần đồ thị hàm số $y = -t - \frac{1}{t}$ trên D=[2, +∞)

Xét hàm số $y = -t - \frac{1}{t}$ trên D=[2, +∞).

Đạo hàm

$$y' = -1 + \frac{1}{t^2} < 0, \forall t \in D \Rightarrow \text{hàm số nghịch biến trên D.}$$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là $m \le -\frac{5}{4}$.

Ví dụ 3: Cho phương trình:

$$(m+1)tg^4x - 3m(1+tg^2x)tg^2x + \frac{4m}{\cos^4 x} = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = -\frac{9}{37}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm khác kπ, k∈Z.

Giải

Điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in Z.$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(m+1)tg^4x - 3m(1+tg^2x)tg^2x + 4m(1+tg^2x)^2 = 0.$$

Chia cả hai vế của phương trình cho $(1+tg^2x)^2 \neq 0$, ta được:

$$(m+1).\left(\frac{tg^2x}{1+tg^2x}\right)^2 - 3m.\frac{tg^2x}{1+tg^2x} + 4m = 0.$$

Đặt $t=\dfrac{tg^2x}{1+tg^2x}$, điều kiện $0\le t<1$, khi đó phương trình có dạng:

$$(m+1)t^2-3mt+4m=0 \qquad (2)$$

a. Với $m=-\dfrac{9}{37}$, ta được:

$$28t^2+27t-36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3}{4} \\ t=-\dfrac{12}{7} \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \dfrac{tg^2x}{1+tg^2x}=\dfrac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow tg^2x=3 \Leftrightarrow tgx=\pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Xét hai trường hợp

Trường hợp 1. Nếu $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 3t-4=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{4}{3} \text{ loại} \Rightarrow \text{phương trình vô nghiệm.}$$

Trường hợp 2. Nếu $m+1\ne 0 \Leftrightarrow m\ne -1$

Phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm } t\in(0,\ 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \text{ co mot nghiem thuoc } (0.1) \\ (2) \text{ co hai nghiem thuoc } (0.1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0).f(1)<0 \\ \begin{cases} \Delta\ge 0 \\ af(0)>0 \\ af(1)>0 \\ 0<\dfrac{S}{2}<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m(2m+1)<0 \\ \begin{cases} -m^2-16m\ge 0 \\ 4m(m+1)>0 \\ (m+1)(2m+1)>0 \\ 0<\dfrac{3m}{2(m+1)}<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m>-\dfrac{1}{2}.$$

Vậy, với $m>-\dfrac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 4: Cho phương trình:

$$2\left(\dfrac{4}{\cos^2x}+\cos^2x\right)+m\left(\dfrac{2}{\cos x}-\cos x\right)=1 \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=9.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $(0,\ \dfrac{\pi}{2})$.

Giải

Điều kiện:

$$\cos x\ne 0 \Leftrightarrow x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Đặt $t=\dfrac{2}{\cos x}-\cos x$, suy ra $\dfrac{4}{\cos^2x}+\cos^2x=t^2+4$.

Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$2(t^2+4)+mt-1=0 \Leftrightarrow f(t)=2t^2+mt+7=0. \qquad (2)$$

a. Với m=9, ta được:

$$2t^2+9t+7=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{\cos x}-\cos x=-1 \\ \dfrac{2}{\cos x}-\cos x=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2x-\cos x-2=0 \\ 2\cos^2x-7\cos x-4=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-1 \\ \cos x=2 \text{ loại} \\ \cos x=-\dfrac{1}{2} \\ \cos x=4 \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi+2k\pi \\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right.,\ k\in Z$$

Vậy với m=9, phương trình có ba họ nghiệm.

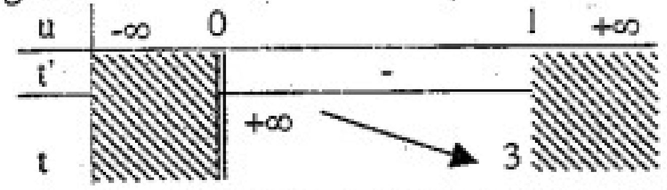
b. Trước tiên ta đi tìm điều kiện cho t khi $x\in(0,\ \dfrac{\pi}{2})$.

Đặt u=cosx, với $x\in(0,\ \dfrac{\pi}{2})$ thì $u\in(0,\ 1)$, khi đó xét hàm số $t=\dfrac{2}{u}-u$ trên tập $D_u=(0,\ 1)$.

Đạo hàm:

$$t'=-\dfrac{2}{u^2}-1<0, \text{ với } \forall u\in D_u \Rightarrow \text{hàm số nghịch biến trên } D_u.$$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là $t\ge 3$.

Vậy để (1) có nghiệm thuộc $(0,\ \dfrac{\pi}{2})$

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm thoả mãn } t\ge 3$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \text{ co mot nghiem } t\ge 3 \\ (2) \text{ co hai nghiem } t\ge 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} af(3)\le 0 \\ \begin{cases} \Delta\ge 0 \\ af(3)\ge 0 \\ S/2\ge 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m\le -\dfrac{25}{3}.$$

Vậy, với $m\le -\dfrac{25}{3}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (ĐHY Hà Nội - 2000): Giải phương trình:

sin4x=tgx.

BÀI GIẢI

Điều kiện

$$\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ

Đặt t=tgx, suy ra phương trình có dạng:

$$2\sin 2x.\cos 2x=\text{tg}x \Leftrightarrow 2.\frac{2t}{1+t^2}.\frac{1-t^2}{1+t^2}=t \Leftrightarrow 4t(1-t^2)=t(1+t^2)^2$$

$$\Leftrightarrow t(t^4+6t^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t^2=-3\pm\sqrt{12} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}x=0 \\ \text{tg}^2x=\sqrt{12}-3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}x=0 \\ \text{tg}x=\pm\sqrt{\sqrt{12}-3}=\pm\text{tg}\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\pm\alpha+k\pi \end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Cách 2: Sử dụng phương pháp phân tích

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 4x=\frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x.\cos x=\sin x$$

$$\Leftrightarrow 4\sin x.\cos x.\cos 2x.\cos x=\sin x \Leftrightarrow (4\cos^2x.\cos 2x-1)\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow [2(1+\cos 2x).\cos 2x-1]\sin x=0 \Leftrightarrow (2\cos^2 2x+2\cos 2x-1)\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \cos 2x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \cos 2x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\cos 2\alpha \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ 2x=\pm 2\alpha+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\pm\alpha+k\pi \end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Bài 2: (ĐHMĐC - 99): Giải phương trình:

$$\text{tg}x.\sin^2x-2\sin^2x=3(\cos 2x+\sin x.\cos x). \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Điều kiện

$$\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\text{tg}x-(1-\cos 2x)=3(\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x)$$

Đặt t=tgx, suy ra phương trình có dạng:

$$(1-\frac{1-t^2}{1+t^2})t-2(1-\frac{1-t^2}{1+t^2})=3[\frac{2(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}] \Leftrightarrow t^3+t^2-3t-3=0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(t^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\pm\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}x=-1 \\ \text{tg}x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.,\ k\in Z$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Bài 3: (ĐHHH - 99): Giải phương trình:

cos2x+5=2(2-cosx)(sinx-cosx).

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos^2x-\sin^2x+5=2(2-\cos x)(\sin x-\cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)[(\cos x+\sin x)+2(2-\cos x)]+5=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)[4-(\cos x-\sin x)]+5=0$$

Đặt t= cosx-sinx, điều kiện $|t|\leq\sqrt{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t(4-t)+5=0 \Leftrightarrow t^2-4t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=5 \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x-\sin x-=-1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=1 \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=\pi+2k\pi \end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Bài 4: Cho phương trình:

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x+\frac{2}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}=m. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=3.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

BÀI GIẢI

Điều kiện $\sin x+\sqrt{3}\cos x\neq 0$. (*)

Đặt t=3cosx+4sinx, điều kiện $|t|\leq 2$, kết hợp với (*), ta được $t\in[-2, 2]\setminus\{0\}$

Khi đó phương trình có dạng:

$$t+\frac{2}{t}=m. \qquad (2)$$

a. Với m=3, ta được:

$$t+\frac{2}{t}=3 \Leftrightarrow t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \text{ loại} \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x+\sqrt{3}\cos x=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1 \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{3})=1$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

b. Phương trình (1) có nghiệm

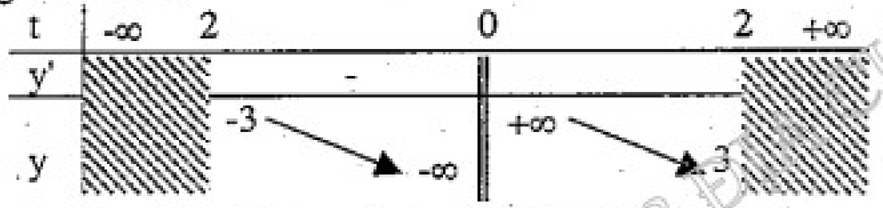
$\Leftrightarrow$ đường thẳng y=m cắt phần đồ thị hàm số $y=t+\frac{2}{t}$ trên $[-2, 2]\backslash\{0\}$

Xét hàm số $y=t+\frac{2}{t}$ trên $D=[-2, 2]\backslash\{0\}$.

Đạo hàm

$$y'=1-\frac{2}{t^2}\le 0,\ \forall t\in D \Rightarrow \text{hàm số nghịch biến trên D.}$$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là |m|≥3.

Bài 5: (ĐH Y&D TPHCM -95): Cho phương trình:

$$(1-m)tg^2x-\frac{2}{\cos x}+1+3m=0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m=\frac{1}{2}$.

b. Tìm m để phương trình có nhiều hơn một nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$.

BÀI GIẢI

Điều kiện

$$\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1-m)(\frac{1}{\cos^2 x}-1)-\frac{2}{\cos x}+1+3m=0 \Leftrightarrow (1-m).\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{2}{\cos x}+4m=0$$

Đặt $t=\frac{1}{\cos x}$, điều kiện |t|≥1.

Khi đó phương trình có dạng:

$$(1-m)t^2-2t+4m=0. \qquad (2)$$

a. Với $m=\frac{1}{2}$, phương trình (2) có dạng:

$$t^2-4t+4=0 \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x}=2 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy với $m=\frac{1}{2}$, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Với $x\in(0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow 0<\cos x<1 \Rightarrow t>1$.

Để phương trình (1) có nhiều hơn một nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm thoả mãn $1<t_1<t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ af(1)>0 \\ S/2>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2-4m+1>0 \\ (1-m)(3m-1)>0 \\ \frac{1}{1-m}>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}<m<1 \\ m\neq\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy với $m\in(\frac{1}{3}, 1)\backslash\{\frac{1}{2}\}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. (ĐHQG Hà Nội - 96): 1+3sin2x=2tgx.
b. (ĐHQG Hà Nội - 2000): 1+3tgx=2sin2x.
c. 6tgx=tg2x.
d. sin2x+2tgx=3.
e. $\cos x+tg\frac{x}{2}=1$.
f. $2+\cos x=2tg\frac{x}{2}$.
g. (1-tgx)(1+sin2x)=1+tgx
h. $4\sin^2x+3tg^2x=1$.
i. $3\sin x+\cos x-4\cot g\frac{x}{2}+1=0$
j. (ĐHY Hà Nội - 96): (cosx-sinx)cosx.sinx=cosx.cos2x.

Bài tập 2: Cho phương trình:

$$\cot g^2x+\frac{m}{\sin x}+2m-1=0.$$

a. Giải phương trình với m=1.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$.

Bài tập 3: Cho phương trình:

$$4tg^2x-2m(1+tg^2x)tgx+\frac{4}{\cos^4x}=0.$$

a. Giải phương trình với m=-5.
b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 4: Cho phương trình:

$$(1-a)tg^2x-\frac{2}{\cos x}+1+3a=0$$

a. Giải phương trình khi $a=\frac{1}{2}$

b. Xác định a để phương trình có nhiều hơn 1 nghiệm trong khoảng $(0,\frac{\pi}{2})$

Bài tập 5: Cho phương trình:

$$\frac{4}{\cos^2x}+\cos^2x+m(\frac{2}{\cos x}+\cos x)-3=0.$$

a. Giải phương trình với $m=-\frac{2}{3}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $(0,\frac{\pi}{2})$.

Bài tập 6: Cho phương trình:

$$3\cos x+4\sin x+\frac{6}{3\cos x+4\sin x+1}=m.$$

a. Giải phương trình với m=6.
b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc (0, π).

BÀI TOÁN 2
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

I.PHƯƠNG PHÁP

Ta sử dụng biến t để chuyển phương trình ban đầu về chứa các cung t, 2t, 3t, ..., kt, rồi sử dụng các công thức góc nhân đôi, nhân ba ...

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\sin(2x-\frac{\pi}{3})=5\sin(x-\frac{\pi}{6})+\cos3x.$$

Giải

Đặt $t=x-\frac{\pi}{6}\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=2t$ & $3x=3t+\frac{\pi}{2}$.

Khi đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$\sin2t=5\sin t+\cos(3t+\frac{\pi}{2})\Leftrightarrow \sin2t=5\sin t-\sin3t$$

$$\Leftrightarrow \sin3t+\sin2t=5\sin t\Leftrightarrow 3\sin t-4\sin^3t+2\sin t.\cos t=5\sin t$$

$$\Leftrightarrow (3-4\sin^2t+2\cos t-5)\sin t=0\Leftrightarrow (2\sin^2t-\cos t+1)\sin t=0$$

$$\Leftrightarrow [2(1-\cos^2t)-\cos t+1]\sin t=0\Leftrightarrow (2\cos^2t+\cos t-3)\sin t=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin t=0\\ \cos t=1\\ \cos t=-3/2\ \text{loại}\end{array}\right.\Leftrightarrow \sin t=0\Leftrightarrow t=k\pi\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$32\cos^6(x+\frac{\pi}{4})-\sin6x=1.$$

Giải

Đặt $t=x+\frac{\pi}{4}\Rightarrow 6x=6t-\frac{3\pi}{2}$.

Khi đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$32\cos^6t-\sin(6t-\frac{3\pi}{2})=1\Leftrightarrow 32\left(\frac{1+\cos2t}{2}\right)^3-\cos6t=1$$

$$\Leftrightarrow 4(1+3\cos2t+3\cos^22t+\cos^32t)-(4\cos^32t-3\cos2t)=1$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^22t+5\cos2t+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos2t=-1\\ \cos2t=-\frac{1}{4}=\cos2\alpha\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2t=\pi+2k\pi\\ 2t=\pm2\alpha+2k\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ t=\alpha+k\pi \\ t=-\alpha+k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\alpha+k\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=-\alpha+k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\alpha-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=-\alpha-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 3: (ĐHQG Hà Nội - 99): Giải phương trình:

$$8\cos^3(x+\frac{\pi}{3})=\cos 3x.$$

Giải

Đặt $t=x+\frac{\pi}{3} \Rightarrow 3x=3t-\pi$.

Khi đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$8\cos^3 t=\cos(3t-\pi) \Leftrightarrow 8\cos^3 t=-\cos 3t \Leftrightarrow 8\cos^3 t=-(4\cos^3 t-3\cos t)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t-\cos t=0 \Leftrightarrow (4\cos^2 t-1)\cos t=0 \Leftrightarrow [2(1+\cos 2t)-1]\cos t=0$$

$$\Leftrightarrow (1+2\cos 2t)\cos t=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t=0 \\ \cos 2t=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ 2t=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ t=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=k\pi \\ x=-\frac{2\pi}{3}+k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$2\cos(x+\frac{\pi}{6})=\sin 3x-\cos 3x.$$

Giải

Đặt $t=x+\frac{\pi}{6} \Rightarrow 3x=3t-\frac{\pi}{2}$.

Khi đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$2\cos t=\sin(3t-\frac{\pi}{2})-\cos(3t-\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow 2\cos t=-\cos 3t-\sin 3t$$

$$\Leftrightarrow 2\cos t=-(4\cos^3 t-3\cos t)-(3\sin t-4\sin^3 t)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t-\cos t+3\sin t-4\sin^3 t=0. \qquad (1)$$

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos t=0 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$.

  Khi đó phương trình có dạng

  $$3\sin(\frac{\pi}{2}+k\pi)-4\sin^3(\frac{\pi}{2}+k\pi)=0 \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy phương trình không nhận $t=\frac{\pi}{2}+k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos t\neq 0 \Leftrightarrow t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$.

  Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3 t\neq 0$, ta được

$$4-(1+tg^2 t)+3(1+tg^2 t).tgt-4tg^3 t=0$$

$$\Leftrightarrow tg^3 t+tg^2 t-3tgt-3=0 \Leftrightarrow (tgt+1)(tg^2 t-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgt=-1 \\ tgt=\sqrt{3} \\ tgt=-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ t=\frac{\pi}{3}+k\pi \\ t=-\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+k\pi \\ x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{5\pi}{12}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (HVCNBCVT - 99): Giải phương trình:

$$\sin(3x-\frac{\pi}{4})=\sin 2x.\sin(x+\frac{\pi}{4}).$$

BÀI GIẢI

Đặt $t=x+\frac{\pi}{4}$ suy ra

$$\begin{cases} 3x-\frac{\pi}{4}=3t-\pi \\ 2x=2t-\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Khi đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$\sin(3t-\pi)=\sin(2t-\frac{\pi}{2}).\sin t \Leftrightarrow -\sin 3t=-\cos 2t.\sin t$$

$$\Leftrightarrow 3\sin t-4\sin^3 t=(1-2\sin^2 t)\sin t \Leftrightarrow \sin^3 t-\sin t=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 t-1)\sin t=0 \Leftrightarrow \cos^2 t.\sin t=0 \Leftrightarrow \cos t.\sin 2t=0$$

DIỄN ĐÀN TOÁN - LÍ - HÓA CAO 2+3 ĐỊA CHỈ: 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

$$\Leftrightarrow \sin 2t=0 \Leftrightarrow 2t=k\pi \Leftrightarrow t=\frac{k\pi}{2} \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{k\pi}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Bài 2: (ĐHTL - 2001): Giải phương trình:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right).$$

BÀI GIẢI

Đặt $t=\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2} \Rightarrow \pi-3t=\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}$.

Khi đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$\sin t=\frac{1}{2}\sin(\pi-3t) \Leftrightarrow 2\sin t=\sin 3t \Leftrightarrow 2\sin t=3\sin t-4\sin^3 t$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 t-\sin t=0 \Leftrightarrow (4\sin^2 t-1)\sin t=0$$

$$\Leftrightarrow [2(1-\cos 2t)-1]\sin t=0 \Leftrightarrow (1-2\cos 2t)\sin t=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin t=0\\ \cos 2t=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=k\pi\\ 2t=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=k\pi\\ t=\pm\frac{\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}=k\pi\\ \frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}=\frac{\pi}{12}+k\pi\\ \frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{12}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{5}-2k\pi\\ x=\frac{4\pi}{5}-2k\pi\\ x=\frac{14\pi}{5}-2k\pi\end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a. $\sin 3x=2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

b. $\cos 3x=2\sin\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)$.

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a. $\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{10}\right)=3\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)$.

b. $\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

Bài tập 3: Giải phương trình:

a. $\cos 9x+2\cos\left(6x+\frac{2\pi}{3}\right)+2=0$.

b. $2\cos\frac{6x}{5}+1=3\cos\frac{8x}{5}$.

BÀI TOÁN 3
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC SỬ DỤNG CÔNG THỨC HẠ BẬC

I.PHƯƠNG PHÁP

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

Bước 2: Thực hiện việc hạ bậc của phương trình bằng các công thức:

Hạ bậc đơn:

1. $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$
2. $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$
3. $tg^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$
4. $cotg^2 x=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$

1. $\sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$
2. $\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$
3. $tg^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{3\cos x+\cos 3x}$
4. $cotg^3 x=\frac{3\cos x+\cos 3x}{3\sin x-\sin 3x}$

ngoài ra còn có:

$$\sin x.\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Hạ bậc toàn cục: Chúng ta đã được biết trong dạng phương trình hỗn hợp chứa $\sin^n x$ và $\cos^n x$.

Hạ bậc đối xứng: Giả sử cần biến đổi biểu thức dạng:

$$A=\sin^3 x.\cos 3x+\cos^3 x.\sin 3x$$

ta có thể lựa chọn hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$A=\sin^2 x.\sin x.\cos 3x+\cos^2 x.\cos x.\sin 3x$$
$$=(1-\cos^2 x).\sin x.\cos 3x+(1-\sin^2 x).\cos x.\sin 3x$$
$$=\sin x.\cos 3x+\cos x.\sin 3x-(\cos x.\cos 3x+\sin x.\sin 3x)\sin x.\cos x$$
$$=\sin 4x-\frac{1}{2}\cos 2x.\sin 2x=\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 4x=\frac{3}{4}\sin 4x.$$

Cách 2: Ta có:

$$A=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)\cos 3x+\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)\sin 3x$$
$$=\frac{3}{4}(\sin x.\cos 3x+\cos x.\sin 3x)=\frac{3}{4}\sin 4x.$$

Ví dụ 1: (Đề 48): Giải phương trình:

$$\sin^2 2x-\cos^2 8x=\sin(10x+\frac{17\pi}{2}).$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1-\cos 4x}{2}-\frac{1+\cos 16x}{2}=\sin(10x+\frac{\pi}{2}+8\pi)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 10x+\cos 16x+\cos 4x=0 \Leftrightarrow 2\cos 10x+2\cos 10x.\cos 6x=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos 6x+1)\cos 10x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 6x=-1\\ \cos 10x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6x=\pi+2k\pi\\ 10x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\\ x=\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10}\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm.

Chú ý: Với những phương trình chứa số lẻ các nhân tử bậc cao (giả sử bằng 3), thông thường ta không đi hạ bậc tất cả các nhân tử đó mà chỉ chọn ra 2 nhân tử để hạ bậc. Cụ thể ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: (ĐHQG Hà Nội - 98): Giải phương trình:

$$\sin^2 x=\cos^2 2x+\cos^2 3x.$$

Giải

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1+\cos 4x}{2}+\cos^2 3x \Leftrightarrow 2\cos^2 3x+(\cos 4x+\cos 2x)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 3x+2\cos 3x.\cos x=0 \Leftrightarrow (\cos 3x+\cos x)\cos 3x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos x.\cos 3x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos x=0\\ \cos 3x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos 3x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ 3x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 3: Cho phương trình:

$$\sin^3 x.\cos 3x+\sin 3x.\cos^3 x=\sin^3 4x+m. \quad (1)$$

a. (ĐHNT Hà Nội - 99): Giải phương trình với m=0.

b. Tìm m để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $[0, \frac{\pi}{6}]$.

Giải

Ta có:

$$VT=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)\cos 3x+\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)\sin 3x$$

$$=\frac{3}{4}(\sin x.\cos 3x+\cos x.\sin 3x)=\frac{3}{4}\sin 4x.$$

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{3}{4}\sin 4x=\sin^3 4x+m \Leftrightarrow 3\sin 4x-4\sin^3 4x=m \Leftrightarrow \sin 12x=m. \quad (2)$$

a. Với m=0, ta được:

$$\sin 12x=0 \Leftrightarrow 12x=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{12}, k\in Z.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

b. Số nghiệm thuộc $[0, \frac{\pi}{6}]$ của phương trình (1) bằng số giao điểm của đường thẳng y=4m với phần đồ thị hàm số y=sin12x lấy trên $[0, \frac{\pi}{6}]$.

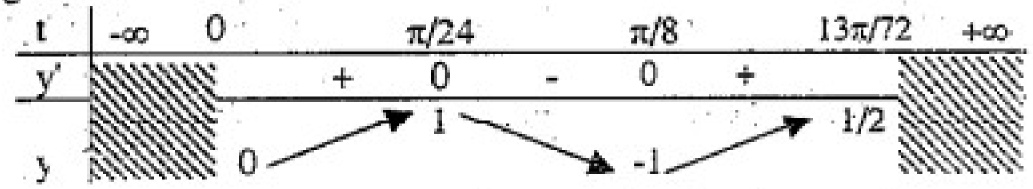
Xét hàm số y=sin12x trên đoạn $[0, \frac{\pi}{6}]$.

Đạo hàm

$$y'=12\cos 12x,$$

$$y'=0 \Leftrightarrow 12\cos 12x=0 \Leftrightarrow 12x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{12} \overset{x\in[0,\frac{\pi}{6}]}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{24}\\ x=\frac{\pi}{8}\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là:

$$0\le 4m\le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0\le m\le \frac{1}{8}.$$

Vậy với $0\le m\le \frac{1}{8}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Việc hạ bậc trong nhiều trường hợp sẽ giúp chúng ta đánh giá đúng đắn mối liên hệ giữa các cung góc trong phương trình. Cụ thể ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 4: (Đề 52): Giải phương trình:

$$\cos^2 x=\cos\frac{4x}{3}.$$

Giải

Ta có:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=\frac{1}{2}[1+\cos(3.\frac{2x}{3})].$$

Đặt $t=\frac{2x}{3}$, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{1}{2}(1+\cos 3t)=\cos 2t \Leftrightarrow 1+4\cos^3 t+3\cos t=2(2\cos^2 t-1)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t-4\cos^2 t-3\cos t+3=0 \Leftrightarrow (\cos t-1)(4\cos^2 t-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t=1\\ 4\cos^2 t-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t=1\\ 2(1+\cos 2t)-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t=1\\ \cos 2t=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{2x}{3}=2k\pi\\ 2.\frac{2x}{3}=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3k\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{3k\pi}{2}\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Chú ý: Với các nhân tử bậc cao hơn 3, ta cần hạ bậc dần. Cụ thể ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 5: (ĐHHH - 95): Giải phương trình:

$$\sin^4 x+\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2+\frac{1}{4}\left[1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow (1-\cos 2x)^2+(1-\sin 2x)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+\sin 2x=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (HVQHQT-98). Giải phương trình:

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=\frac{3}{2}.$$

BÀI GIẢI

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$1+\cos 2x+1+\cos 4x+1+\cos 6x+2\cos^2 4x=3$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+2\cos^2 4x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 4x.\cos 2x+\cos 4x+2\cos^2 4x=0 \Leftrightarrow \cos 4x(2\cos 2x+1+2\cos 4x)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x(4\cos^2 2x+2\cos 2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos 4x=0 & (1)\\ 4\cos^2 2x+2\cos 2x-1=0 & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}, (k\in Z).$$

Giải (2): Đặt t=cos2x, điều kiện $|t|\le 1$, ta được:

$$4t^2+2t-1=0 \Leftrightarrow t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

- Với $t_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, ta được:

$$\cos 2x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=\cos 2\alpha \Leftrightarrow x=\pm\alpha+k\pi, k\in Z.$$

- Với $t_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$, ta được:

$$\cos 2x=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}=\cos 2\beta \Leftrightarrow x=\pm\beta+k\pi, k\in Z.$$

Vậy, phương trình có 5 họ nghiệm.

Bài 2: (HVCNBCVT - 2001): Giải phương trình:

$$4\sin^3 x.\cos 3x+4\cos^3 x.\sin 3x+3\sqrt{3}\cos 4x=3 \quad (1)$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$$4\sin^3 x.\cos 3x+4\cos^3 x.\sin 3x=(3\sin x-\sin 3x).\cos 3x+(\cos 3x+3\cos x)\sin 3x$$
$$=3(\sin 3x.\cos x+\cos 3x.\sin x)=3\sin 4x.$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$3\sin 4x+3\sqrt{3}\cos 4x=3 \Leftrightarrow \sin 4x+\sqrt{3}\cos 4x=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 4x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 4x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ 4x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right. (k\in Z)$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài 3: (Đề 15): Giải phương trình:

$$1+2\cos^2\frac{3x}{5}=3\cos\frac{4x}{5}.$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$$\cos^2\frac{3x}{5}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{6x}{5}\right)=\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(3.\frac{2x}{5}\right)\right].$$

Đặt $t=\frac{2x}{5}$, phương trình được biến đổi về dạng:

$$1+1+\cos3t=3\cos2t \Leftrightarrow 2+4\cos^3t+3\cos t=3(2\cos^2t-1)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3t-6\cos^2t-3\cos t+5=0 \Leftrightarrow (\cos t-1)(4\cos^2t-2\cos t-5)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = 1 \\ \cos t = \frac{1-\sqrt{21}}{4} = \cos\alpha \\ \cos t = \frac{1+\sqrt{21}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2x}{5} = 2k\pi \\ \frac{2x}{5} = \pm\alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5k\pi \\ x = \pm\frac{5\alpha}{2} + 5k\pi \end{array}\right., k\in Z$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Bài 4: (ĐHGTVT - 2001): Giải phương trình:

$$\sin^4x+\sin^4(x+\frac{\pi}{4})+\sin^4(x-\frac{\pi}{4})=\frac{9}{8}.$$

BÀI GIẢI

Biến đổi vế trái của phương trình về dạng:

$$VT=\sin^4x+\sin^4(x+\frac{\pi}{4})+\sin^4(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})=\sin^4x+\sin^4(x+\frac{\pi}{4})+\cos^4(x+\frac{\pi}{4})$$

$$=\left(\frac{1-\cos2x}{2}\right)^2+\left[\sin^2(x+\frac{\pi}{4})+\cos^2(x+\frac{\pi}{4})\right]^2-2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})\cos^2(x+\frac{\pi}{4})$$

$$=\left(\frac{1-\cos2x}{2}\right)^2+1-\frac{1}{2}\sin^2(2x+\frac{\pi}{2})=\left(\frac{1-\cos2x}{2}\right)^2+1-\frac{1}{2}\cos^22x$$

$$=-\frac{1}{4}(\cos^22x+2\cos2x-5).$$

Khi đó phương trình có dạng:

$$-\frac{1}{4}(\cos^22x+2\cos2x-5)=\frac{9}{8} \Leftrightarrow 2\cos^22x+4\cos2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \cos2x=\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \cos2x=\frac{-2+\sqrt{6}}{2}=\cos2\alpha \Leftrightarrow x=\pm\alpha+k\pi, k\in Z.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài 5: (Đề 81): Giải phương trình:

$$1+\sin x.\sin\frac{x}{2}-\sin^2x.\cos\frac{x}{2}=2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}).$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$1+\sin x.\sin\frac{x}{2}-\sin^2x.\cos\frac{x}{2}=1+\cos(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\sin\frac{x}{2}-\sin^2x.\cos\frac{x}{2}=\sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 0 & (1) \\ \sin\frac{x}{2}-\sin x.\cos\frac{x}{2}=1 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$x=k\pi, k\in Z. \qquad (3)$$

Giải (2): Ta được:

$$\sin\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}=1 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}-2(1-\sin^2\frac{x}{2})\sin\frac{x}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^3\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}-1=0 \Leftrightarrow (\sin\frac{x}{2}-1)(2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow x=\pi+4k\pi, k\in Z. \qquad (4)$$

Kết hợp (3) và (4) ta được $x=k\pi$, $k\in Z$.

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

a. (Đề 48): $\sin^24x-\cos^26x=\sin(10x+\frac{21\pi}{2})$.

b. (ĐHKTQD Hà Nội - 99): $\sin^2x+\sin^23x=\cos^22x+\cos^24x$.

c. (ĐH Huế - 98): $\sin^23x+\sin^22x+\sin^2x=\frac{3}{2}$.

d. (ĐHY-98): $\sin^23x-\sin^22x-\sin^2x=0$.

e. (ĐH Việt Nam Khối B - 2002): $\sin^23x-\cos^24x=\sin^25x-\cos^26x$.

Bài tập 2. Giải các phương trình sau:

a. (Đề 135): $\sin^3x.\sin3x+\cos^3x.\cos3x=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

b. (Đề 142): $\sin^3x.\sin3x+\cos^3x.\cos3x=\cos^34x$.

c. (ĐHNN - 2001): $\cos^3x.\cos3x-\sin3x.\sin^3x=\cos^34x+\frac{1}{4}$.

d. (ĐHLN-97): $\sin^32x.\cos6x+\sin6x.\cos^32x=\frac{3}{8}$.

Bài tập 3. Giải các phương trình sau:

a. $32\cos^6x=1+\cos6x$.

b. $\sin^22x-\cos^28x=\sin(\frac{17\pi}{2}+10x)$.

Bài tập 4. Giải các phương trình sau:

a. $\cos^3x.\cos3x+\sin^3x.\sin3x=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

b. $\cos^34x=\cos3x.\cos^3x+\sin^3x.\sin3x$.

Bài tập 5. Giải các phương trình sau:

a. $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x$.

b. $\cos^4 x - \cos 2x + 2\sin^6 x = 0$.

Bài tập 6. Giải các phương trình sau:

a. $\cos^4 x + \cos^4(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$.

b. $\frac{\sin^{10} x + \cos^{10} x}{4} = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{4\sin^2 2x + \cos^2 2x}$.

Bài tập 7. (ĐHSP TPHCM - 2000): Giải phương trình:

$$2\cos^2 x + 2\cos^2 2x + 2\cos^2 3x - 3 = (2\sin 2x + 1)\cos 4x.$$

Bài tập 8. (ĐHTDTT - 2001): Giải phương trình:

$$\cos 3x + \sin 7x = 2\sin^2(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4}) - 2\cos^2\frac{9x}{2}.$$

Bài tập 9. Cho phương trình:

$$\sin^2[(x+1)y] = \sin^2(xy) + \sin^2[(x-1)y].$$

Tìm nghiệm x, y của phương trình để (x+1)y, xy, (x-1)y là số đo các góc của tam giác.

Bài tập 10. Xác định m để phương trình :

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{4}m.\sin 4x - (2m+1)\sin^2 x.\cos^2 x = 0$$

có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Bài tập 11. Xác định a để phương trình sau có nghiệm:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

Bài tập 12. Giải các phương trình sau:

Bài tập 13. Cho phương trình:

$$\frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 2m\,tg 2x$$

a. Giải phương trình khi $m = \frac{1}{8}$

b. Xác định m để phương trình có nghiệm

Bài tập 14. Tìm a để phương trình sau có nghiệm :

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a|\sin 2x|$$

Bài tập 15. Giải và biện luận phương trình:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = m(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

Bài tập 16. Tìm tổng các nghiệm của phương trình:

$$2\cos^2 x + \cot g^2 x = \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x}$$

thoả mãn $2 \le x \le 40$.

BÀI TOÁN 4

BIẾN ĐỔI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THÀNH PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

I.PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Việc biến đổi phương trình lượng giác về phương trình tích phụ thuộc vào các phép biến đổi dạng:

Dạng 1: Biến đổi tổng, hiệu thành tích.
Dạng 2: Biến đổi tích thành tổng.
Dạng 3: Lựa chọn phép biến đổi cho cos2x.
Dạng 4: Phương pháp luận hệ số.
Dạng 5: Phương pháp hằng số biến thiên.
Dạng 6: Phương pháp nhân.
Dạng 7: Sử dụng các phép biến đổi hỗn hợp.

ta đưa phương trình cần giải về dạng tích:

$$A.B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$$

trong đó các phương trình A=0, B=0 là các phương trình có dạng chuẩn.

Với các bài toán có tham số, để xác định điều kiện sao cho phương trình có đúng k nghiệm trên miền D, cần chú ý tới số nghiệm của mỗi phương trình thành phần.

Sau đây ta sẽ đi xét từng dạng.

1. Phương pháp biến đổi tổng, hiệu thành tích

Ví dụ 1: (ĐHNL TPHCM - 2001): Giải phương trình:

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi tổng thành tích

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1 + \cos 2x) + (\cos 3x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\cos 2x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \cos 2x).\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{x}{2}.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{x}{2} = 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos\frac{3x}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos\frac{3x}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi về phương trình chứa 1 hàm lượng giác

Biến đổi phương trình về dạng:

$$1+\cos x+2\cos^2x-1+4\cos^3x-3\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3x+2\cos^2x-2\cos x=0 \Leftrightarrow (2\cos^2x+\cos x-1)\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=-1\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pi+2k\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Nhận xét: Cách 1 tỏ ra đơn giản hơn nhưng các em học sinh cần nhớ rằng nếu VP là hằng số khác 0 hoặc chứa tham số thì cách 2 là sự lựa chọn đúng đắn.

Ví dụ 2: (HVQHQT - 99): Giải phương trình:

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\cos x+\cos 3x)+(\cos 2x+\cos 4x)=0 \Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos x+2\cos 3x.\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x+\cos 3x).\cos x=0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{5x}{2}.\cos\frac{x}{2}.\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=0\\ \cos x=0\\ \cos\frac{5x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \frac{5x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+2k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Nhận xét: Trong lời giải trên ta lựa chọn cách gom *theo hiệu* (hiệu hai góc bằng nhau) do đó đương nhiên có thể nhóm:

$$(\cos x+\cos 2x)+(\cos 3x+\cos 4x)=0.$$

Ngoài ra còn có thể gom *theo tổng* (tổng hai góc bằng nhau)

$$(\cos x+\cos 4x)+(\cos 2x+\cos 3x)=0.$$

Ví dụ 3: (ĐHNT TPHCM - 2000): Giải phương trình.

$$1+\sin x+\cos 3x=\cos x+\sin 2x+\cos 2x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1-\cos 2x)+\sin x+(\cos 3x-\cos x)-\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2x+\sin x-2\sin 2x.\sin x-2\sin x.\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x+1-4\sin x.\cos x-2\cos x)\sin x=0 \Leftrightarrow (2\sin x+1)(1-2\cos x)\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \sin x=0\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ x=k\pi\\ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có năm họ nghiệm.

Nhận xét: Trong lời giải trên sở dĩ ta lựa chọn cách gom như vậy bởi nhận thấy rằng chúng đều có chung nhân tử sinx.

Ví dụ 4: (ĐHNT Hà Nội - 98): Giải phương trình:

$$\sin x+\sin^2x+\sin^3x+\sin^4x=\cos x+\cos^2x+\cos^3x+\cos^4x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin x-\cos x)+(\sin^2x-\cos^2x)+(\sin^3x-\cos^3x)+(\sin^4x-\cos^4x)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)[1+(\sin x+\cos x)+(1+\sin x\cos x)+(\sin x+\cos x)]=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)[2+2(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin x-\cos x=0 & (1)\\ 2+2(\sin x+\cos x)+\sin x.\cos x=0 & (2)\end{array}\right.$$

__Giải (1)__: Ta được:

$$\sin x=\cos x \Leftrightarrow tgx=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z$$

__Giải (2)__: Đặt sinx+cosx=t, điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$2+2t+\frac{t^2-1}{2}=0 \Leftrightarrow t^2+4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=-3 \text{ loại}\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x+\cos x=-1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=-1 \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ x=\pi+2k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 5: (Đề 129): Giải và biện luận theo a, b phương trình:

$$\cos ax+\cos 2bx-\cos(a+2b)x=1.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1-\cos ax)+[\cos(a+2b)x-\cos 2bx]=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{ax}{2}-2\sin(\frac{a}{2}+2b)x.\sin\frac{ax}{2}=0 \Leftrightarrow [\sin\frac{ax}{2}-\sin(\frac{a}{2}+2b)x].\sin\frac{ax}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(\frac{a}{2}+b)x.\sin(-bx).\sin\frac{ax}{2}=0 \Leftrightarrow \cos(\frac{a}{2}+b)x.\sin bx.\sin\frac{ax}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos(\frac{a}{2}+b)x=0\\ \sin bx=0\\ \sin\frac{ax}{2}=0\end{array}\right. \qquad (1)$$

- Với a=0, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos bx=0\\ \sin bx=0\\ \sin 0.x=0\end{array}\right. \Rightarrow \text{phương trình nghiệm đúng với } \forall x\in R.$$

- Với b=0, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{ax}{2}=0\\ \sin 0.x=0\\ \sin\frac{ax}{2}=0\end{array}\right. \Rightarrow \text{phương trình nghiệm đúng với } \forall x\in R.$$

- Với $\frac{a}{2}$+b=0 & a, b≠0, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}bx=k\pi\\ \frac{ax}{2}=k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{b}\\ x=\frac{2k\pi}{a}\end{array}\right., k\in Z.$$

- Với $\frac{a}{2}$+b≠0 & a, b≠0, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(\frac{a}{2}+b)x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ bx=k\pi\\ \frac{ax}{2}=k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi+2k\pi}{a+2b}\\ x=\frac{k\pi}{b}\\ x=\frac{2k\pi}{a}\end{array}\right., k\in Z.$$

Ví dụ 6: Tìm m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thuộc [0, 3π/4]

sin2x+m=sinx+2mcosx (1)

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

2sinx.cosx+m=sinx+2mcosx ⇔ (2cosx-1)(sinx-m)=0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \sin x=m\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}\in[0,\frac{3\pi}{4}]\\ \sin x=m \qquad (1)\end{array}\right.$$

Vậy, để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc $[0, \frac{3\pi}{4}]$

⇔ phương trình (1) có đúng một nghiệm khác $\frac{\pi}{3}$ thuộc $[0, \frac{3\pi}{4}]$.

Nhận xét rằng phương trình sinx=m nếu có nghiệm α∈[0,π] thì cũng sẽ có nghiệm π-α∈[0,π], do đó điều kiện là phương trình sinx=m có nghiệm $x=\frac{\pi}{3}$ hoặc $x=\frac{\pi}{2}$ hoặc $x\in[0, \frac{\pi}{4})$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\sin\frac{\pi}{3}\\ m=\sin\frac{\pi}{2}\\ 0\le m<\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ m=1\\ 0\le m<\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$

2. Phương pháp biến đổi tích thành tổng

Ví dụ 7: (Đề 118): Cho phương trình:

2cosx.cos2x.cos3x+m=7cos2x. (1)

a. Giải phương trình với m=-7.

b. Tìm để phương trình có nhiều hơn một nghiệm $x\in[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}]$.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

(cos4x+cos2x).cos2x+m=7cos2x

⇔ (2cos²2x-1+cos2x).cos2x+m=7cos2x

⇔ $2\cos^3 2x+\cos^2 2x-8\cos 2x+m=0$.

Đặt t=cos2x, đk |t|≤1.

Khi đó phương trình có dạng:

$2t^3+t^2-8t+m=0$. (2)

a. Với m=7, ta được:

$$2t^3+t^2-8t-7=0 \Leftrightarrow (t+1)(2t^2-t-7)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=\frac{1\pm\sqrt{57}}{4} \text{ loại}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x=-1 \Leftrightarrow 2x=\pi+2k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

b. Với $x\in[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}] \Rightarrow t\in[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Vậy để phương trình (1) có nhiều hơn một nghiệm $x\in[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}]$

$\Leftrightarrow$ (2) có nhiều hơn một nghiệm $t\in[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Xét hàm số $y=2t^3+t^2-8t+m$ trên $D=[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Đạo hàm

$y'=6t^2+2t>0, \forall t\in D \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên D

do đó (2) không thể có nhiều hơn một nghiệm $t\in[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Vậy không tồn tại m thoả mãn điều kiện đầu bài.

3. Lựa chọn phép biến đổi cho cos2x

Ví dụ 8: (Đề 68): Giải phương trình:

$$2\cos^3x+\cos2x+\sin x=0.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\cos^3x+2\cos^2x-1+\sin x=0 \Leftrightarrow 2(\cos x+1)\cos^2x+\sin x-1=0$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos x+1)(1-\sin^2x)+\sin x-1=0 \Leftrightarrow (1-\sin x)[2(\cos x+1)(1+\sin x)-1]=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin x)[1+2\sin x.\cos x+2(\sin x+\cos x)]=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin x)[(\sin x+\cos x)^2+2(\sin x+\cos x)]=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin x)(\sin x+\cos x)(\sin x+\cos x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\sin x=0 \\ \sin x+\cos x=0 \\ \sin x+\cos x+2=0 \text{ vn} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=1 \\ \sin(x+\frac{\pi}{4})=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Nhận xét:

a. Trong lời giải trên sở dĩ chúng ta lựa chọn phép biến đổi:

$$\cos2x=2\cos^2x-1$$

bởi 2 nhân tử còn lại là $2\cos^3x$ (cos có hệ số 2) và sinx (sin có hệ số 1)

b. Như vậy trong trường hợp trái lại, ta sẽ lựa chọn phép biến đổi:

$$\cos2x=1-2\sin^2x$$

Cụ thể chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 9: (ĐHNN I - 99): Giải phương trình:

$$2\sin^3x-\cos2x+\cos x=0.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin^3x-1+2\sin^2x+\cos x=0 \Leftrightarrow 2(\sin x+1)\sin^2x+\cos x-1=0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x+1)(1-\cos^2x)+\cos x-1=0 \Leftrightarrow (1-\cos x)[2(\sin x+1)(1+\cos x)-1]=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)[1+2\sin x.\cos x+2(\sin x+\cos x)]=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)[(\sin x+\cos x)^2+2(\sin x+\cos x)]=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)(\sin x+\cos x)(\sin x+\cos x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\cos x=0 \\ \sin x+\cos x=0 \\ \sin x+\cos x+2=0 \text{ vn} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=1 \\ \sin(x+\frac{\pi}{4})=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2k\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Nhận xét: Như vậy chúng ta đã có được phương pháp suy luận trong việc lựa chọn hai hướng biến đổi cho cos2x. Cuối cùng, trong trường hợp hệ số đối xứng ta sẽ lựa chọn phép biến đổi:

$$\cos2x=\cos^2x-\sin^2x.$$

Cụ thể chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 10: (ĐHY Hà Nội - 2000): Giải phương trình:

$$\sin^3x+\cos^3x=\cos2x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin^3x+\cos^3x=\cos^2x-\sin^2x \Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1-\sin x.\cos x+\sin x-\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x+\cos x=0 & (1) \\ 1-\sin x.\cos x+\sin x-\cos x=0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$\sin x=-\cos x \Leftrightarrow \text{tg}x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z.$$

Giải (2): Đặt sinx-cosx=t, điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó (2) có dạng:

$$1-\frac{1-t^2}{2}+t=0 \Leftrightarrow t^2+2t+1=0 \Leftrightarrow (t+1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow t=-1 \Leftrightarrow \sin x-\cos x=-1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=-1$$

$$\Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=\pi+2 \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Giải (1): Ta được:

$$\mathrm{tg}x=\frac{3}{5}=\mathrm{tg}\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi,\ k\in Z$$

Giải (2): Đặt sinx+cosx=t, điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t-\frac{t^2-1}{2}=0 \Leftrightarrow t^2-2t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1-\sqrt{2} \\ t=1+\sqrt{2}\ \text{loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x+\cos x=1-\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1-\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sin\beta$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\beta+2k\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\pi-\beta+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\beta-\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x=\frac{3\pi}{4}-\beta+2k\pi \end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 16: (ĐHQG Hà Nội Khối A - 2000): Giải phương trình:

$$2\sin x+\mathrm{cotg}x=2\sin 2x+1.$$

Giải

Điều kiện

$\sin x \Leftrightarrow x\ne k\pi,\ k\in Z.$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(2\sin x-1)-(2\sin 2x-\mathrm{cotg}x)=0 \Leftrightarrow (2\sin x-1)-(4\sin x.\cos x-\frac{\cos x}{\sin x})=0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x-1)-\frac{(4\sin^2 x-1)\cos x}{\sin x}=0 \Leftrightarrow (2\sin x-1)[\sin x-(2\sin x+1)\cos x]=0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x-1)(\sin x-\cos x-2\sin x\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\sin x-1=0 & (1) \\ \sin x-\cos x-2\sin x.\cos x=0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$\sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right.,\ k\in Z$$

Giải (2): Đặt sinx-cosx=t, điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t-(1-t^2)=0 \Leftrightarrow t^2+t-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \sin x-\cos x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}=\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=\alpha+2k\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=\pi-\alpha+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x=\frac{5\pi}{4}-\alpha+2k\pi \end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có bốn họ nghiệm.

5. Phương pháp hằng số biến thiên

Ví dụ 17: (HVQY - 97): Giải phương trình:

$$(\sin x+3)\sin^4\frac{x}{2}-(\sin x+3)\sin^2\frac{x}{2}+1=0.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Phương pháp hằng số biến thiên

Đặt $t=\sin^2\frac{x}{2}$, điều kiện $0\le t\le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$(\sin x+3)t^2-(\sin x+3)t+1=0$$

Ta có:

$$\Delta=(\sin x+3)^2-4(\sin x+3)=(\sin x+3)(\sin x-1)\le 0$$

do đó phương trình được chuyển thành:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta=0 \\ t=-\frac{b}{2a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin x-1=0 \\ \sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin x=1 \\ 1-\cos x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Cách 2: Phương pháp phân tích

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin^2\frac{x}{2}-1)(\sin x+3)\sin^2\frac{x}{2}+1=0 \Leftrightarrow -(\sin x+3)\sin^2\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}+1=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(\sin x+3)\sin^2 x+1=0 \Leftrightarrow \sin^3 x+3\sin^2 x-4=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x-1)(\sin^2 x+4\sin x+4)=0 \Leftrightarrow (\sin x-1)(\sin x+2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

6. Phương pháp nhân

Ví dụ 18: (HVQHQT - 96): Giải phương trình:

$$\sin\frac{5x}{2}=5\cos^3 x.\sin\frac{x}{2}.$$

Giải

a. Với $\cos\frac{x}{2}=0$, ta được:

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=-1\ \&\ \sin\frac{x}{2}=\pm 1 \Rightarrow VP=\pm 5$$

Chú ý: Đôi khi việc gom các toán tử trong đầu bài nhằm tăng độ phức tạp của bài toán. Khi đó để tiện cho việc cân nhắc lựa chọn phép biến đổi các em học sinh hãy chuyển phương trình về dạng đơn. Cụ thể ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 11: (ĐHQG Hà Nội - 95): Giải phương trình:

$$4\sin 2x-3\cos 2x=3(4\sin x-1).$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\sin 2x-3\cos 2x=12\sin x-3 \Leftrightarrow 4\sin 2x-3(1-2\sin^2 x)=12\sin x-3$$

$$\Leftrightarrow 8\sin x.\cos x+6\sin^2 x=12\sin x \Leftrightarrow 2(4\cos x+3\sin x-6)\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ 4\cos x+3\sin x=6 \text{ vô nghiệm}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in Z.$$

Nhận xét: Trong lời giải trên khi chuyển phương trình về dạng đơn, ta lựa chọn phép biến đổi $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ bởi khi đó sẽ khử được số hạng tự do và cùng với nhận xét các toán tử còn lại đều chứa sinx.

Ví dụ 12: (ĐHTS - 99): Tìm m để phương trình sau có nghiệm $x\in(0, \frac{\pi}{4})$:

$$\sin^4 x+\cos 2x+m.\cos^6 x=0. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1-\cos^2 x)^2+2\cos^2 x-1+m.\cos^6 x=0 \Leftrightarrow \cos^4 x+m.\cos^6 x=0$$

$$\Leftrightarrow (1+m.\cos^2 x).\cos^4 x=0 \Leftrightarrow m.\cos^2 x=-1. \qquad (2)$$

Vì $x\in(0, \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}<\cos x<1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\cos^2 x<1$,

do đó để phương trình (1) có nghiệm $x\in(0, \frac{\pi}{4})$ điều kiện là:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0\\ \frac{1}{2}<-\frac{1}{m}<1\end{cases} \Leftrightarrow -2<m<-1.$$

Vậy với $-2<m<-1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

4. Phương pháp luận hệ số

Ví dụ 13: (HVQHQT - 2000): Giải phương trình:

$$\cos x+\cos 3x+2\cos 5x=0$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\cos 5x+\cos x)+(\cos 3x+\cos 5x)=0 \Leftrightarrow 2\cos 3x.\cos 2x+2\cos 4x.\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow (4\cos^3 x-3\cos x).\cos 2x+\cos 4x.\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow [(4\cos^2 x-3).\cos 2x+\cos 4x].\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \{[2(1+\cos 2x)-3].\cos 2x+2\cos^2 2x-1\}.\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow (4\cos^2 2x-\cos 2x-1).\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos 2x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}=\cos 2\alpha_{1,2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ 2x=\pm 2\alpha_{1,2}+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\alpha_{1,2}+k\pi\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 14: (ĐHTL - 2000): Giải phương trình:

$$\frac{\sin 3x}{3}=\frac{\sin 5x}{5}.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$5\sin 3x=3\sin 5x \Leftrightarrow 2\sin 3x=3(\sin 5x-\sin 3x)$$

$$\Leftrightarrow 2(3\sin x-4\sin^3 x)=6\cos 4x.\sin x \Leftrightarrow (3-4\sin^2 x-3\cos 4x).\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow [3-2(1-\cos 2x)-3(2\cos^2 2x-1)].\sin x=0 \Leftrightarrow (3\cos^2 2x-\cos 2x-2).\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=1\\ \cos 2x=-\frac{2}{3}\\ \sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=-\frac{2}{3}=\cos 2\alpha\\ \sin x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\pm 2\alpha+2k\pi\\ x=k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\alpha+k\pi\\ x=k\pi\end{array}\right.$$

Chú ý: Các em học sinh cũng có thể giải ví dụ trên theo phương pháp tách dần:

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x,$$

$$\sin 5x=\sin(x+4x)=\sin x.\cos 4x+\cos x.\sin 4x$$

$$=\sin x.\cos 4x+2\cos x.\cos 2x.\sin 2x=\sin x.\cos 4x+4\cos^2 x.\cos 2x.\sin x.$$

Ví dụ 15: (ĐHGT - 97): Giải phương trình:

$$3(\text{cotg}x-\cos x)-5(\text{tg}x-\sin x)=2.$$

Giải

Điều kiện

$$\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow 2x\neq k\pi \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3(\text{cotg}x-\cos x+1)-5(\text{tg}x-\sin x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow 3(\frac{\cos x}{\sin x}-\cos x+1)-5(\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(\cos x-\sin x.\cos x+\sin x)}{\sin x}-\frac{5(\sin x-\sin x.\cos x+\cos x)}{\cos x}=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x-\sin x.\cos x)(\frac{3}{\sin x}-\frac{5}{\cos x})=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\frac{3}{\sin x}=\frac{5}{\cos x} & (1)\\ \sin x+\cos x-\sin x.\cos x=0 & (2)\end{array}\right.$$

Khi đó phương trình có dạng:

$\sin\frac{5x}{2}=\pm5$ vô nghiệm.

b. Với $\cos\frac{x}{2}\neq0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\neq\pi+2k\pi,\ k\in Z.$ (*)

Nhân cả hai vế của phương trình với $2\cos\frac{x}{2}\neq0$, ta được:

$$2\sin\frac{5x}{2}.\cos\frac{x}{2}=10\cos^3x.\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin3x+\sin2x=5\cos^3x.\sin x \Leftrightarrow 3\sin x-4\sin^3x+2\sin x.\cos x=5\cos^3x.\sin x$$

$$\Leftrightarrow (3-4\sin^2x+2\cos x-5\cos^3x).\sin x=0 \Leftrightarrow (5\cos^3x-4\cos^2x-2\cos x+1).\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow (5\cos^2x+\cos x-1)(\cos x-1)\sin x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5\cos^2x+\cos x-1=0\\ \cos x=1\\ \sin x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1-\sqrt{21}}{10}=\cos\alpha\\ \cos x=\frac{1+\sqrt{21}}{10}=\cos\beta\\ \sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\alpha+2k\pi\\ x=\pm\beta+2k\pi\\ x=k\pi\end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}x=\pm\alpha+2k\pi\\ x=\pm\beta+2k\pi\\ x=2k\pi\end{array}\right.,\ k\in Z$$

Vậy phương trình có năm họ nghiệm.

7. Sử dụng các phép biến đổi hỗn hợp

Ví dụ 19: (Đề 76): Giải phương trình:

$$\cos10x+2\cos^24x+6\cos3x.\cos x=\cos x+8\cos x.\cos^33x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos10x+1+\cos8x=\cos x+2(4\cos^33x-3\cos3x)\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos9x.\cos x+1=\cos x+2\cos9x.\cos x \Leftrightarrow \cos x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 20: (HVQY - 2000): Giải phương trình:

$$\cos^2x+\sin^3x+\cos x=0.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos^2x+\cos x+\sin^2x.\sin x=0 \Leftrightarrow (\cos x+1)\cos x+(1-\cos^2x)\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x+1)[\cos x+(1-\cos x)\sin x]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x=-1 & (1)\\ \sin x+\cos x-\sin x.\cos x=0 & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$x=\pi+2k\pi,\ k\in Z$

Giải (2): Đặt sinx+cosx=t, điều kiện $|t|\leq\sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t-\frac{t^2-1}{2}=0 \Leftrightarrow t^2-2t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1-\sqrt{2}\\ t=1+\sqrt{2}\ \text{loại}\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x+\cos x=1-\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1-\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\alpha+2k\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\pi-\alpha+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\alpha-\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\frac{3\pi}{4}-\alpha+2k\pi\end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 21: (ĐHCSND - 2000): Giải phương trình:

$$\cos^3x+\sin^3x=\sin2x+\sin x+\cos x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin x+\cos x)(1-\sin x.\cos x)=\sin2x+\sin x+\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin x+\cos x)\sin2x=\sin2x \Leftrightarrow (\sin x+\cos x-2)\sin2x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin2x=0 \Leftrightarrow 2x=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 22: Cho phương trình:

$$\sin4x=m\text{tg}x. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=4.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm $x\neq k\pi,\ k\in Z$.

Giải

Điều kiện:

$$\cos x\neq0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin2x.\cos2x=\frac{m\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow 4\sin x.\cos x.\cos2x.\cos x=m.\sin x$$

$$\Leftrightarrow (4\cos^2x.\cos2x-m)\sin x=0 \Leftrightarrow [2(1+\cos2x).\cos2x-m)\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos^22x+2\cos2x-m)\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ 2\cos^22x+2\cos2x-m=0\end{array}\right. \overset{t=\cos2x}{\underset{|t|\leq1}{\Leftrightarrow}} \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ 2t^2+2t=m \quad (2)\end{array}\right.$$

a. Với m=4, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2 \text{ loai} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos 2x=1 \Leftrightarrow 2x=2k\pi \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in Z$$

Vậy với m=4, phương trình có một họ nghiệm $x=k\pi,\ k\in Z$.

b. Để phương trình (1) có nghiệm $x\neq k\pi,\ k\in Z \Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t\in[-1,\ 1)$

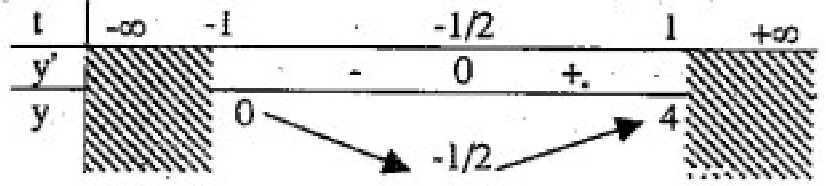
$\Leftrightarrow$ đường thẳng y=m cắt phần đồ thị hàm số $y=2t^2+2t$ trên phần $[-1,\ 1)$

Xét hàm số $y=2t^2+2t$ trên $D=[-1,\ 1)$

Đạo hàm

$$y'=4t+2,\ y'=0 \Leftrightarrow 4t+2=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là $-\frac{1}{2}\leq m<4$.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (Đề 72): Giải phương trình:

$$\cos^4x-\cos 2x+2\sin^6x=0.$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos^4x-(1-2\sin^2x)+2\sin^6x=0 \Leftrightarrow \cos^4x-1+2(1+\sin^4x).\sin^2x=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2x-1)(\cos^2x+1)+2(1+\sin^4x).\sin^2x=0$$

$$\Leftrightarrow [-(\cos^2x+1)+2(1+\sin^4x)].\sin^2x=0 \Leftrightarrow (2\sin^4x+\sin^2x).\sin^2x=0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin^2x+1).\sin^4x=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Bài 2: (ĐHGQ Khối A - 2001): Giải phương trình:

$$2\sin 2x-\cos 2x=7\sin x+2\cos x-4.$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin x.\cos x-2\cos x-(1-2\sin^2x)=7\sin x-4$$

$$\Leftrightarrow 2(2\sin x-1).\cos x+2\sin^2x-7\sin x+3=0$$

$$\Leftrightarrow 2(2\sin x-1)\cos x+(2\sin x-1)(\sin x-3)=0 \Leftrightarrow (2\sin x-1)(2\cos x+\sin x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=\frac{1}{2} \\ 2\cos x+\sin x=3\ \ (\text{vn}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài 3: (ĐHNT-97): Giải phương trình:

$$9\sin x+6\cos x-3\sin 2x+\cos 2x=8.$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$9\sin x+6\cos x-6\sin x.\cos x+\cos 2x=9-1$$

$$\Leftrightarrow 9(\sin x-1)-6\cos x(\sin x-1)+\cos 2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow 9(\sin x-1)-6\cos x(\sin x-1)+2\cos^2x=0$$

$$\Leftrightarrow 9(\sin x-1)-6\cos x(\sin x-1)-2(\sin^2x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x-1)(9-6\cos x-2\sin x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=1 \\ 6\cos x-2\sin x=7\ (\text{vn}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$.

Bài 4: (ĐHXD-96): Giải phương trình:

$$\cos^5x+\sin^7x+\frac{1}{2}(\cos^3x+\sin^5x)\sin 2x=\cos x+\sin x.$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos^5x+\sin^7x+(\cos^3x+\sin^5x)\sin x.\cos x=\cos x+\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos^5x+\sin^7x+\cos^4x.\sin x+\sin^6x.\cos x=\cos x+\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos^4x(\cos x+\sin x)+\sin^6x(\cos x+\sin x)=\cos x+\sin x$$

$$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(\sin^6x+\cos^4x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)[\sin^6x-\sin^2x(\cos^2x+1)]=0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2x(\cos x+\sin x)(\sin^4x-\cos^2x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2x(\cos x+\sin x)(\sin^4x+\sin^2x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x+\sin x=0 \\ \sin^2x=0 \\ \sin^2x=1 \\ \sin^2x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x+\sin x=0 \\ \sin x=0 \\ \cos x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\frac{k\pi}{2} \end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài 5: (ĐHTH Khối B- 92): Giải phương trình:

$$2\sin 3x.(1-4\sin^2x)=1.$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin 3x.(4\cos^2x-3)=1.$$

Nhận xét rằng cosx=0 không phải là nghiệm của phương trình, bởi:

$$VT=\left[\begin{array}{l} 2(3-4)(-3)\neq 1 \\ 2(-3+4)(-3)\neq 1 \end{array}\right.$$

do đó nhân cả hai vế của phương trình với cosx, ta được:

$$2\sin 3x.(4\cos^2x-3).\cos x=\cos x \Leftrightarrow 2\sin 3x.(4\cos^3x-3\cos x)=\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 3x.\cos 3x=\cos x \Leftrightarrow \sin 6x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi \\ 6x=\pi-\frac{\pi}{2}+x+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{14}+\frac{2k\pi}{7} \\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5} \end{array}\right., k\in Z$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Bài 6: Cho phương trình:

$$\sin 2(x-\pi)-\sin(3x-\pi)=m.\sin x. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=-1.

b. (Đề 28): Tìm m để phương trình có nghiệm $x\neq k\pi$, $k\in Z$.

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 2x+\sin 3x=m.\sin x \Leftrightarrow 2\sin x.\cos x+3\sin x-4\sin^3x=m.\sin x$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x+3-4\sin^2x-m).\sin x=0 \Leftrightarrow (4\cos^2x+2\cos x-m-1).\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ 4\cos^2x+2\cos x-m-1=0 \end{array}\right. \underset{|t|\le 1}{\overset{t=\cos x}{\Leftrightarrow}} \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ 2t^2+2t-1=m \qquad (2) \end{array}\right.$$

a. Với m=-1, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 4t^2+2t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \cos x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right., k\in Z$$

Vậy với m=-1, phương trình có bốn họ nghiệm.

b. Để phương trình (1) có nghiệm $x\neq k\pi$, $k\in Z \Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t\in(-1, 1)$

$\Leftrightarrow$ đường thẳng y=m cắt phần đồ thị hàm số $y=4t^2+2t-1$ trên (-1, 1)

Xét hàm số $y=2t^2+2t$ trên D=(-1, 1)

Đạo hàm

$$y'=8t+2,\ y'=0 \Leftrightarrow 8t+2=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{4}$$

Bảng biến thiên

t	-∞	-1		-1/4		1	+∞
y'	▨	▨	-	0	+	▨	▨
y	▨	1	↘	-5/4	↗	5	▨

Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là $-\frac{5}{4}\le m<5$.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a. (ĐH Huế - 98): $2\sin^3x+\cos 2x-\sin x=0$.

b. (ĐH Đà Nẵng Khối B - 97): $\sin 3x-\sin x+\sin 2x=0$.

c. (HVNH TPHCM - 2000): $\sin^2x+\cos^3x+\sin x=0$.

d. (ĐHHH - 2000): $(2\sin x+1)(3\cos 4x+2\sin x-4)+4\cos^2x=3$.

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a. (Đề 100): $tg^2x=\frac{1-\cos^3x}{1-\sin^3x}$.

b. (ĐHTS - 97): $cotg^2x=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}$.

c. $tg^2x=\frac{1+\cos x}{1-\sin x}$.

d. $cotg^2x=\frac{1-\cos^3x}{1-\sin^3x}$.

e. $tg^2x=\frac{1+\cos^3x}{1+\sin^3x}$.

Bài tập 3: Giải các phương trình sau:

a. (HVNH Hà Nội - 99): $\cos^2x+\cos^3x+2\sin x-2=0$.

b. (ĐHBK TPHCM - 91): $\sin 3x-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2x=2\cos 2x.\sin x$.

Bài tập 4: Giải các phương trình sau:

a. $\frac{3(\cos 2x+\cot g2x)}{\cot g2x-\cos 2x}-2\sin 2x=2$

b. $\frac{\cos x}{\cos 3x}-\frac{\cos 5x}{\cos x}=8\sin x.\sin 3x$.

Bài tập 5: Giải các phương trình sau:

a. $3tg3x+cotg2x=2tgx+\frac{2}{\sin 4x}$

b. $cotgx-tgx=\sin x+\cos x$

Bài tập 6: Giải các phương trình sau:

a. $3\sin 3x-\sqrt{3}\cos 9x=1+4\sin^33x$.

b. $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+2\cos 2x=0$.

c. (ĐHSP-97): $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x+\sin 6x=0$.

d. $4\cos x-2\cos 2x-\cos 4x=1$.

e. (ĐHQG/TPHCM-97): $\cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{3x}{2}-\sin x.\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{2}$.

Bài tập 7: Giải các phương trình sau:

a. $\sin^3x + \cos^3x = \sin x - \cos x$

b. $\sin^2x.\cos x - \cos 2x + \sin x - \cos^2x.\sin x - \cos x = 0$

Bài tập 8: Giải các phương trình sau:

a. $\sin 3x.\sin 6x = \sin 9x$

b. $1 + tg2x = \dfrac{1 - \sin 2x}{\cos^2 2x}$

Bài tập 9: Giải các phương trình sau:

a. $\sin^3x - \cos^3x = \sin x + \cos x$

b. $2\cos 2x - \sin 2x = 2(\sin x + \cos x)$

Bài tập 10: Giải các phương trình sau:

a. $\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2x$

b. $\sin^2x + 2\sin^2\dfrac{x}{2} - 2\sin x.\ \sin^2\dfrac{x}{2} + \cot gx = 0$

Bài tập 11: (ĐHY Hải Phòng - 2000) Tìm x thuộc đoạn [0, 14] nghiệm đúng phương trình:

$$\sin 3x + \sin 2x = 5\sin x.$$

Bài tập 12: Cho phương trình:

$$(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + m) = 3 - 4\cos^2x.$$

a. Giải phương trình khi m = 1

b. Xác định m để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc $[0, \pi]$

Bài tập 13: Cho phương trình:

$$4\sin 2x + m\cos x = \cos 3x.$$

a. Giải phương trình: $\sin 2(x - \pi) - \sin(3x - \pi) = \sin x$

b. Tìm a để phương trình $\sin 2(x - \pi) - \sin(3x - \pi) = a\sin x$ có ít nhất một nghiệm $x \neq k\pi$ $(k \in Z)$

Bài tập 14: Cho phương trình:

$$\cos 3x - \cos 2x + m\cos x - 1 = 0.$$

Xác định m để phương trình có đúng 7 nghiệm thuộc khoảng $(\dfrac{\pi}{2}, 2\pi)$

Bài tập 15: Xác định m để phương trình:

$$m\cos 3x + 4(1 - 2m)\sin^2x + (7m - 4)\cos x + 8m - 4 = 0$$

có đúng 3 nghiệm thuộc khoảng $(0, 2\pi)$

BÀI TOÁN 5

BIẾN ĐỔI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THÀNH TỔNG CÁC ĐẠI LƯỢNG KHÔNG ÂM

I.PHƯƠNG PHÁP

Ta cần nhớ các đại lượng không âm trong lượng giác, bao gồm:

A^2, $|B|$, $1 \pm \cos x$, $1 \pm \sin x$,

do đó để sử dụng phương pháp này giải phương trình lượng giác ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi phương trình ban đầu về dạng:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 0. \qquad (1)$$

Bước 2: Dùng lập luận khẳng định $A_i \geq 0$, $\forall i = \overline{1, n}$.

Bước 3: Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \\ \ldots \\ A_n = 0 \end{cases}. \qquad (I)$$

Bước 4: Giải hệ (I).

Ví dụ 1: (CĐSP Hà Nội 2000): Giải phương trình:

$$\cos^2 4x + \cos^2 8x = \sin^2 12x + \sin^2 16x + 2.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$1 - \sin^2 4x + 1 - \sin^2 8x = \sin^2 12x + \sin^2 16x + 2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 4x + \sin^2 8x + \sin^2 12x + \sin^2 16x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sin 8x = 0 \\ \sin 12x = 0 \\ \sin 16x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4},\ k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 2: (Đề 32): Giải phương trình:

$$4\cos^2x + 3tg^2x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\,tgx + 4 = 0.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng: .

$$(2\cos x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}\,tgx + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & (1) \\ tgx = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & (2) \end{cases}.$$

- Giải (1)

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z.$$

- Kiểm tra điều kiện (2)

  - Với $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, ta được:

$$tgx=tg(\frac{\pi}{6}+2k\pi)=tg\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$, không thoả mãn.

  - Với $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$, ta được:

$$tgx=tg(-\frac{\pi}{6}+2k\pi)=tg(-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$, thoả mãn.

do đó $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ là nghiệm của phương trình.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (Đề 83): Giải phương trình:

$$\cos2x-\cos6x+4(3\sin x-4\sin^3x+1)=0.$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos2x+1+1-\cos6x+4\sin3x+2=0 \Leftrightarrow 2\cos^2x+2\sin^23x+4\sin3x+2=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2x+2(\sin3x+1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=0\\ \sin 3x=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-1\end{array}\right.\\ 3\sin x-4\sin^3x=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Bài 2: (Đề 131): Giải phương trình:

$$\sin^2x+\frac{1}{4}\sin^23x=\sin x.\sin^23x.$$

BÀI GIẢI

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\sin^2x-4\sin x.\sin^23x+\sin^43x-\sin^43x+\sin^23x=0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x-\sin^23x)^2+(1-\sin^23x)\sin^23x=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\sin x-\sin^23x=0\\ (1-\sin^23x)\sin^23x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=\frac{1}{2}\sin^23x\\ \left[\begin{array}{l}\sin^23x=1\\ \sin^23x=0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin^23x=1\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin^23x=0\\ \sin x=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(3\sin x-4\sin^3x)^2=1\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}3\sin x-4\sin^3x=0\\ \sin x=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ \sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\\ x=k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Cách 2: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\sin^2x-\sin x.\sin^23x+\frac{1}{4}\sin^23x=0. \qquad (1)$$

Coi (1) là phương trình bậc 2 theo sinx, ta có:

$$\Delta=\sin^43x-\sin^23x=(\sin^23x-1)\sin^23x\le0,\ \forall x$$

do đó được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases}\Delta=0\\ \sin x=\frac{1}{2}\sin^23x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin^23x=1\\ \sin^23x=0\end{array}\right.\\ \sin x=\frac{1}{2}\sin^23x\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin^23x=1\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin^23x=0\\ \sin x=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(3\sin x-4\sin^3x)^2=1\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}3\sin x-4\sin^3x=0\\ \sin x=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ \sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\\ x=k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải phương trình:

a. (ĐHY Hà Nội - 97): $\cos^4x+\sin^6x=\cos2x$.

b. $\sin^2x+\frac{1}{4}\sin^23x=\sin x.\sin^23x$

Bài tập 2. Giải phương trình:

$$\sin^2x+\sin^2y+\sin^2(x+y)=\frac{9}{4}$$

Bài tập 3. Giải phương trình:

$$tg^2x+tg^2y+cotg^2(x+y)=1$$

Bài tập 4. Giải phương trình:

$$x^2-2x.\sin xy+1=0$$

BÀI TOÁN 6

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

I.PHƯƠNG PHÁP

Ta đánh giá phương trình dựa trên các dạng:

Dạng 1: Tính chất của các hàm số lượng giác và biểu thức lượng giác.

Dạng 2: Phương trình lượng giác dạng Pitago.

Dạng 3: Sử dụng bất đẳng thức Côsi.

Dạng 4: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski

sau đây ta sẽ đi xét từng dạng.

1. Tính chất của các hàm số lượng giác và biểu thức lượng giác

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\sin 3x=2.$$

Giải

Ta có nhận xét:

$$\begin{cases}|\sin x+\sqrt{3}\cos x|\le 2\\ |\sin 3x|\le 1\end{cases}\Rightarrow |(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\sin 3x|\le 2$$

do đó phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\\ \sin 3x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x+\sqrt{3}\cos x=-2\\ \sin 3x=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{3})=1\\ \sin 3x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{3})=-1\\ \sin 3x=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \sin 3x=1\end{cases}\\ \begin{cases}x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \sin 3x=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ \sin 3x=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\\ \sin 3x=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 2: (ĐHD 2000): Giải phương trình:

$$\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=\cos x.\cos 2x.\cos 3x+2.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x).\cos 3x+2$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x+2\cos 4x+2\cos 6x=\cos^2 3x+\cos x.\cos 3x+4$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x+2\cos 4x+2\cos 6x=\frac{1}{2}(1+\cos 6x)+\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 2x)+4$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=3 \qquad (*)$$

Ta có nhận xét:

$$\begin{cases}\cos 2x\le 1\\ \cos 4x\le 1\\ \cos 6x\le 1\end{cases}\Rightarrow VT=\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x\le 3$$

do đó phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}\cos 2x=1\\ \cos 4x=1\\ \cos 6x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x=1\\ 2\cos^2 2x-1=1\\ 4\cos^3 2x-3\cos 2x=1\end{cases}\Leftrightarrow \cos 2x=1\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in Z$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Nhận xét: Trong ví dụ trên bằng phương pháp biến đổi tích thành tổng chúng ta đã chuyển phương trình ban đầu về dạng để đánh giá, điều đó khẳng định rằng hầu hết các phương trình lượng giác ở dạng ban đầu chúng ta chưa thể khẳng định được rằng nó có thuộc loại đánh giá hay không. Tất cả chỉ được khẳng định sau những biến đổi lượng giác mà chúng ta đã biết.

Ví dụ 3: (ĐHNT Hà Nội - 2000): Giải phương trình:

$$\sin^8 x+\cos^8 x=2(\sin^{10} x+\cos^{10} x)+\frac{5}{4}\cos 2x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1-2\sin^2 x)\sin^8 x-(2\cos^2 x-1)\cos^8 x=\frac{5}{4}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x.\sin^8 x-\cos 2x.\cos^8 x=\frac{5}{4}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow(\sin^8 x-\cos^8 x)\cos 2x=\frac{5}{4}\cos 2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\cos 2x=0 & (1)\\ \sin^8 x-\cos^8 x=\frac{5}{4} & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in Z$$

Giải (2): Ta có nhận xét:

$$VT=\sin^8 x-\cos^8 x\le \sin^8 x\le 1\Rightarrow (2) \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 4: (ĐHNT Hà Nội - 95): Giải phương trình:

$$4\cos x-2\cos 2x-\cos 4x=1.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\cos x-2\cos 2x-(2\cos^2 2x-1)=1\Leftrightarrow 2\cos x-(1+\cos 2x)\cos 2x=0$$

DIỄN ĐÀN TOÁN - LÍ - HÓA CAO 2+3 ĐỊA CHỈ: 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

$$\Leftrightarrow 2\cos x-2\cos^2x.\cos2x=0 \Leftrightarrow (1-\cos x.\cos2x)\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow (2-\cos3x-\cos x)\cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x=0 & (1)\\ \cos3x+\cos x=2 & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$$

Giải (2): Ta có nhận xét:

$$\begin{cases}\cos3x\le1\\ \cos x\le1\end{cases} \Rightarrow VT=\cos3x+\cos x\le2$$

do đó

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases}\cos3x=1\\ \cos x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4\cos^3x-3\cos x=1\\ \cos x=1\end{cases} \Leftrightarrow \cos x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi,\ k\in Z$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 5: (HVCNBCVT - 98): Giải phương trình:

$$\sin4x-\cos4x=1+4(\sin x-\cos x).$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin4x-(1+\cos4x)=4(\sin x-\cos x) \Leftrightarrow 2\sin2x.\cos2x-2\cos^22x=4(\sin x-\cos x)$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin2x-\cos2x)(\cos^2x-\sin^2x)=4(\sin x-\cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)[(\sin2x-\cos2x)(\cos x+\sin x)+2]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x-\sin x=0 & (1)\\ (\sin2x-\cos2x)(\cos x+\sin x)+2=0 & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$\sin x=\cos x \Leftrightarrow tgx=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z$$

Giải (2): Ta có:

$$2\sin(2x-\frac{\pi}{4}).\cos(x+\frac{\pi}{4})=-2 \Leftrightarrow \sin3x+\sin(x-\frac{\pi}{2})=-2 \Leftrightarrow \sin3x-\cos x=-2$$

Ta có nhận xét:

$$\begin{cases}\sin3x\ge-1\\ -\cos x\ge-1\end{cases} \Rightarrow VT=\sin3x-\cos x\ge2$$

do đó

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases}\sin3x=-1\\ -\cos x=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sin3x=-1\\ \sin x=0\end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Chú ý. Có thể giải (2) bằng cách

Ta có:

$$\begin{cases}|\sin x+\cos x|\le\sqrt2\\ |\cos2x-\sin2x|\le\sqrt2\end{cases} \Rightarrow |(\sin x+\cos x)(\cos2x-\sin2x)|\le2.$$

Vậy phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x+\cos x=\sqrt2\\ \cos2x-\sin2x=\sqrt2\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x+\cos x=-\sqrt2\\ \cos2x-\sin2x=-\sqrt2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=-\frac{\pi}{8}+k\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\frac{3\pi}{8}+k\pi\end{cases}\end{array}\right. \text{ vô nghiệm.}$$

2. Phương trình lượng giác dạng Pitago

Ví dụ 6: (Đề 109): Giải phương trình:

$$\frac{1}{4}(\sin^{10}x+\cos^{10}x)=\frac{\sin^6x+\cos^6x}{\sin^22x+4\cos^22x}. \qquad (1)$$

Giải

Ta có nhận xét:

$$VP=\frac{(\sin^2x+\cos^2x)^3-3\sin^2x.\cos^2x}{4(\sin^22x+\cos^22x)-3\sin^22x}=\frac{1-\frac{3}{4}\sin^22x}{4-3\sin^22x}=\frac{1}{4}.$$

Mặt khác

$$\begin{cases}\cos^{10}x\le\cos^2x\\ \sin^{10}x\le\sin^2x\end{cases} \Rightarrow VT=\frac{1}{4}(\sin^{10}x+\cos^{10}x)\le\frac{1}{4}(\cos^2x+\sin^2x)=\frac{1}{4}$$

do đó

$$(1) \Leftrightarrow VT=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos^{10}x=\cos^2x\\ \sin^{10}x=\sin^2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=\pm1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\pm1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin2x=0 \Leftrightarrow 2x=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Chú ý: Việc mở rông phương trình lượng giác dạng Pitago bằng cách nhúng thêm vào đó những toán tử khác để rồi đánh giá chúng bằng những nhận xét khác là điều thường gặp. Chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 7: (ĐHNN I - 2000): Giải phương trình:

$$\cos^5x+\sin^5x+\sin2x+\cos2x=1+\sqrt2. \qquad (1)$$

Giải

Ta có nhận xét:

$$\begin{cases}\cos^5x\le\cos^2x\\ \sin^5x\le\sin^2x\end{cases} \Rightarrow \cos^5x+\sin^5x\le\cos^2x+\sin^2x=1,$$

$$\sin2x+\cos2x=\sqrt2\sin(2x+\frac{\pi}{4})\le\sqrt2$$

suy ra:

$$VT=\cos^5x+\sin^5x+\sin2x+\cos2x\le1+\sqrt{2}$$

do đó

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\cos^5x=\cos^2x\\ \sin^5x=\sin^2x\\ \sin(2x+\frac{\pi}{4})=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos^5x=\cos^2x\\ \sin^5x=\sin^2x\\ x=\frac{\pi}{8}+k\pi\end{cases}\text{ vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

3. Sử dụng bất đẳng thức Côsi

Ví dụ 8: (HVQY - 97): Giải phương trình:

$$\sin^8 2x+\cos^8 2x=\frac{1}{8}. \qquad (1)$$

Giải

Cách 1: Sử dụng phương pháp giải phương trình lượng giác hỗn hợp chứa các biểu thức đối xứng với $\sin^{2n}x$ và $\cos^{2n}x$

Ta có:

$$\sin^8 2x+\cos^8 2x=(\sin^4 2x+\cos^4 2x)^2-2\sin^4 2x.\cos^4 2x$$
$$=[(\sin^2 2x+\cos^2 2x)^2-2\sin^2 2x.\cos^2 2x]^2-2\sin^4 2x.\cos^4 2x$$
$$=(1-\frac{1}{2}\sin^2 4x)^2-\frac{1}{8}\sin^4 4x=\frac{1}{8}\sin^4 4x-\sin^2 4x+1.$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{1}{8}\sin^4 4x-\sin^2 4x+1=\frac{1}{8}\Leftrightarrow\sin^4 4x-8\sin^2 4x+7=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin^2 4x=1\\ \sin^2 4x=1\ \text{loại}\end{array}\right.\Leftrightarrow\cos4x=0\Leftrightarrow4x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4},\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức Côsi

Ta có nhận xét:

$$\begin{cases}\cos^8 2x+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4\overset{\text{Côsi}}{\ge}\frac{1}{2}\cos^2 2x\\ \sin^8 2x+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4\overset{\text{Côsi}}{\ge}\frac{1}{2}\sin^2 2x\end{cases}$$

$$\overset{+}{\Rightarrow}\ \sin^8 2x+\cos^8 2x+6.\left(\frac{1}{2}\right)^4\ge\frac{1}{2}(\sin^2 2x+\cos^2 2x)$$

$$\Leftrightarrow\sin^8 2x+\cos^8 2x\ge\frac{1}{8}$$

do đó

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\cos^8 2x=\left(\frac{1}{2}\right)^4\\ \sin^8 2x=\left(\frac{1}{2}\right)^4\end{cases}\Leftrightarrow\sin^2 2x=\cos^2 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos4x=0$$

$$\Leftrightarrow4x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4},\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 9: (Đề 77): Giải phương trình:

$$(\text{tg}x+\frac{1}{4}\text{cotg}x)^n=\sin^n x+\cos^n x \qquad (1)$$

với $2\le n\in N$.

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x\ne0\\ \sin x\ne0.\end{cases}\Leftrightarrow\sin2x\ne0\Leftrightarrow2x\ne k\pi\Leftrightarrow x\ne\frac{k\pi}{2},\ k\in Z. \qquad (*)$$

Ta có nhận xét:

$$|VT|=|(\text{tg}x+\frac{1}{4}\text{cotg}x)^n|=(|\text{tg}x|+\frac{1}{4}|\text{cotg}x|)^n\overset{\text{Côsi}}{\ge}(2\sqrt{\frac{1}{4}|\text{tg}x|.|\cot gx|})^n=1$$

$$\begin{cases}\cos^n x\le\cos^2 x\\ \sin^n x\le\sin^2 x\end{cases}\Rightarrow VT=\sin^n x+\cos^n x\le\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

do đó

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}VT=VP=1\\ VT=VP=-1\end{array}\right.\overset{(I)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}VT=1\\ n=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{tg}x=\frac{1}{4}\cot gx\\ n=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{tg}^2x=\frac{1}{4}\\ n=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\text{tg}x=\pm\frac{1}{2}=\pm\text{tg}\alpha\\ n=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\alpha+k\pi\\ n=2\end{cases},\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm và với n=2.

4. Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski

Ví dụ 10: (Đề 146). Giải phương trình:

$$\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}+\sin x.\sqrt{2-\sin^2 x}=3.$$

Giải

Ta có:

$$VT^2=(1.\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}.1+\sin x.\sqrt{2-\sin^2 x})^2$$
$$\le(1+2-\sin^2 x+\sin^2 x)(\sin^2 x+1+2-\sin^2 x)=9$$
$$\Rightarrow VT\le3.$$

Vậy phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow$ sinx=1 $\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, k∈Z.

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 11: (ĐHAN): Giải phương trình:

$$2\cos x+\sqrt{2}\sin 10x=3\sqrt{2}+2\cos 28x.\sin x \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2(\cos x-\cos 28x\sin x)=\sqrt{2}(3-\sin 10x)$$

Ta có:

$VT\le 2.\sqrt{1+\cos^2 28x}\le 2\sqrt{2}$.

$VP\ge\sqrt{2}(3-1)=2\sqrt{2}$.

Vậy, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}VT=2\sqrt{2}\\VP=2\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos^2 28x=1\\\sin 10x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 28x=0\\\sin 10x=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(20x+8x)=0\\\sin 10x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 8x=0\\\cos 8x.\sin 2x=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=\pm 1\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in Z.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (Đề 130): Giải phương trình:

$$\cot g3x+\cot g2x+\frac{1}{\sin 3x.\sin 2x.\sin x}=0 \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases}\sin 3x\ne 0\\\sin 2x\ne 0\\\sin x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 3x\ne 0\\\sin 2x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x\ne k\pi\\2x\ne k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne\frac{k\pi}{3}\\x\ne\frac{k\pi}{2}\end{cases},\ k\in Z. \qquad (I)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sin 5x}{\sin 3x.\sin 2x}+\frac{1}{\sin 3x.\sin 2x.\sin x}=0\Leftrightarrow \sin 5x,\sin x+1=0 \qquad (2)$$

Ta có:

$$\begin{cases}|\sin 5x|\le 1\\|\sin x|\le 1\end{cases}\Rightarrow|\sin 5x.\sin x|\le 1\Rightarrow \sin 5x.\sin x\ge -1\Leftrightarrow \sin 5x.\sin x+1\ge 0$$

Vậy, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\sin 5x.\sin x=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 5x=1\\\sin x=-1\end{cases}\\\begin{cases}\sin 5x=-1\\\sin x=1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow \cos x=0 \text{ vi phạm (I)}$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

Bài 2: (HVKTQS-98): Giải phương trình:

$$\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x-\sqrt{3}\sin x-\cos x+4=0. \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$$\begin{cases}\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x\ge -2\\-\sqrt{3}\sin x-\cos x\ge -2\end{cases}\Rightarrow VT(1)\ge 0$$

Vậy, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$VT(1)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=-2\\-\sqrt{3}\sin x-\cos x=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=-1\\\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(2x+\frac{\pi}{3})=-1\\\cos(x-\frac{\pi}{3})=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(2x+\frac{\pi}{3})=-1\\x-\frac{\pi}{3}=2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(\frac{2\pi}{3}+4k\pi+\frac{\pi}{3})=-1\\x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài 3: (Đề 94): Giải phương trình:

$$\cos^3 x+\sin^3 x=2-\sin^4 x. \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Ta có nhận xét:

$\sin^4 x\le 1\Rightarrow VP=2-\sin^4 x\ge 1$

$$\begin{cases}\cos^3 x\le\cos^2 x\\\sin^3 x\le\sin^2 x\end{cases}\Rightarrow VT=\cos^3 x+\sin^3 x\le\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

do đó

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}VP=1\\VT=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^4 x=1\\\cos^3 x=\cos^2 x\\\sin^3 x=\sin^2 x\end{cases}\Leftrightarrow \sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,(2 - \sin 3x)$.
b. $\sin 2x.\cos 8x = 1$.
c. $\sin^3 x + \cos^3 x = (2 - \sin^4 x)$.
d. $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x$.
e. $4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1$.
f. $\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x.\sin^2 3x$.
g. $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$.
h. $\sin^2 2x - tg^2 x = \frac{9}{2}\cos 2x$.
i. $\frac{\sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\cos 3x}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 3x}$.
j. $2\sin 3x - \frac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \frac{1}{\cos x}$

Bài tập 2: Giải các phương trình:

a. $cotg2x + cotg3x + \frac{1}{\sin x.\sin 2x.\sin 3x} = 0$
b. $\frac{\sin 4x + \sin 2x - 4\sin 3x + 2\cos 2x - 4}{\sin x - 1} = 0$.

Bài tập 3: Giải các phương trình:

a. $7\cos^2 x + 1995\sin^{1994} x = 1995$.
b. (Đề 94): $\cos^{13} x + \sin^{14} x = 1$.
c. $\cos^{13} x + \sin^{14} x = 1$.
d. $\sin^{2000} x + \cos^{2000} x = 1$.

Bài tập 4: Giải các phương trình:

a. (Đề 83): $(\sin^3\frac{x}{2} + \frac{1}{\sin^3\frac{x}{2}})^2 + (\cos^3\frac{x}{2} + \frac{1}{\cos^3\frac{x}{2}})^2 = \frac{81}{4}\cos^2 4x$.
b. $\left(tgx + \frac{1}{4}\cot gx\right)^n = \cos^n x + \sin^n x$, với $n \in N$, $n \geq 2$.

Bài tập 5: Giải các phương trình:

a. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$.
b. $\sin x + tgx - 2x = 0$, với $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.
c. $\cos x = 1 + x$.
d. $x - \sin\frac{\pi}{3}(x+1)\sin\frac{\pi(1-x)}{3} = 0$ với $x \in [0,1]$

Bài tập 6: Giải các phương trình:

a. $x^2 - 2x.\sin xy + 1 = 0$
b. $12\sin x + 5\cos x = 2y^2 - 8x + 21$
c. $\frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = y^2 - 4y + 5$
d. $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 + \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y$

Bài tập 7: Giải các phương trình:

a. $(2m + 1)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) + 2m^2 + 2m + 2 = 0$
b. $2m^2 - 2m(\cos x + \sin x) + \frac{3}{2} = \cos x - \sin x$

Bài tập 8: (Đề 74): Tìm a để phương trình có nghiệm:
$(\cos 4x - \cos 2x)^2 = (a^2 + 4a + 3)(a^2 + 4a + 6) + 7 + \sin 3x$.

CHỦ ĐỀ 13

PHƯƠNG TRÌNH HỆ QUẢ, HAI PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Xác định tham số để phương trình này là hệ quả của phương trình kia.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho hai phương trình

$$f(x, m) = 0 \qquad (1)$$

$$g(x, m) = 0 \qquad (2)$$

Xác định tham số để phương trình (1) là hệ quả của phương trình (2) (nói cách khác "*để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2)*").

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: *Điều kiện cần*

- Giải và tìm nghiệm $x = x_0$ của (1).
- Để phương trình (1) là hệ quả của phương trình (2), trước hết cần $x = x_0$ cũng là nghiệm của (2), tức là:

  $$g(x_0, m) = 0 \Rightarrow m = m_0.$$

- Vậy $m = m_0$ chính là điều kiện cần.

Bước 2: *Điều kiện đủ*

- Với $m = m_0$

  (1) $\Leftrightarrow f(x, m_0) = 0 \Rightarrow$ nghiệm của (1)

  (2) $\Leftrightarrow g(x, m_0) = 0 \Rightarrow$ nghiệm của (2)

- Kết luận.

Ví dụ 1: Cho hai phương trình:

$$1 + tgx = \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}. \qquad (1)$$

$$m(1 + \sin x) - \sin 2x = m^2. \qquad (2)$$

Tìm m để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

Giải

Trước hết ta đi giải (1), điều kiện

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z.$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$1+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(1+\sin x)=\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos x+\sin x+\cos x.\sin x+\sin^2 x=\cos x \Leftrightarrow (1+\cos x+\sin x)\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x+\cos x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \text{ loại}\\ x=\pi+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in Z.$$

Do đó để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2) điều kiện là x=kπ, k∈Z cũng là nghiệm của (2), tức là:

$$m(1+\sin k\pi)-\sin 2k\pi=m^2 \Leftrightarrow m=m^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=1\end{array}\right.$$

Vậy với m=0 hoặc m=1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét: Như vậy trong lời giải của bài toán trên ta đã không sử dụng mẫu phương pháp điều kiện cần và đủ bởi các lý do sau:

1 Phương trình (1) không chứa tham số.

2 Dễ dàng tìm được tất cả các nghiệm của (1) và phép thử các nghiệm đó vào (2) đơn giản.

Trong những trường hợp một trong các lý do trên bị vi phạm các em học sinh nên thực hiện đúng mẫu điều kiện cần và đủ để giải.

Trong trường hợp (1) có chứa tham số ta cần chỉ ra được một nghiệm tường minh của (1) để tìm được điều kiện cần cho m. Cụ thể ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: (Đề 42): Cho hai phương trình:

$$\sin x+m.\cos x=1 \qquad (1)$$

$$m.\sin x+\cos x=m^2. \qquad (2)$$

Tìm m để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

Giải

Điều kiện cần

Nhận xét rằng với mọi m (1) luôn có nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, k∈Z

Do đó để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2) trước hết cần $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, k∈Z cũng là nghiệm của (2), tức là:

$$m.\sin(\frac{\pi}{2}+2k\pi)+\cos(\frac{\pi}{2}+2k\pi)=m^2 \Leftrightarrow m=m^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=1\end{array}\right.$$

Đó chính là điều kiện cần của m.

Điều kiện đủ

- Với m=0, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \sin x=1$$

$$(2) \Leftrightarrow \cos x=0$$

suy ra mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

- Với m=1, ta được:

$$(1), (2) \Leftrightarrow \sin x+\cos x=1$$

suy ra mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

Vậy với m=0 hoặc m=1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Tồn tại những bài toán mà không thể chỉ ra được dạng nghiệm tường minh cho phương trình (1) khi đó ta cần đánh giá thông qua tính chất nghiệm của các phương trình lượng giác, thí dụ như phương trình sinx=m có nghiệm x_0 thì cũng nhận $\pi-x_0$ làm nghiệm, khi đó bằng cách thay vào (2) cả x_0 và $\pi-x_0$ vào (2) ta sẽ tìm được điều kiện cần cho tham số. Cụ thể ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: Cho hai phương trình:

$$\cos(x+y)=a \qquad (1)$$

$$\sin(x+y)=b. \qquad (2)$$

Tìm a, b để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

Giải

Điều kiện cần

Nhận xét rằng nếu (x_0, y_0) là nghiệm của (1) thì $(-x_0, -y_0)$ cũng là nghiệm của (1), do đó để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của phương trình (2) trước hết cần (x_0, y_0) và $(-x_0, -y_0)$ cũng là nghiệm của (2), tức là:

$$\left\{\begin{array}{l}\sin(x_0+y_0)=b\\ \sin(-x_0-y_0)=b\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\sin(x_0+y_0)=b\\ -\sin(x_0+y_0)=b\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}b=0\\ \sin(x_0+y_0)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}b=0\\ x_0+y_0=k\pi\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}b=0\\ \cos k\pi=a\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}b=0\\ |a|=1\end{array}\right.$$

Đó chính là điều kiện cần của a và b.

Điều kiện đủ

- Với a=1 & b=0, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \cos(x+y)=1$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin(x+y)=0$$

suy ra mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

- Với a=-1 & b=0, ta được:

$(1) \Leftrightarrow \cos(x+y)=-1$

$(2) \Leftrightarrow \sin(x+y)=0$

suy ra mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

Vậy với a=1 & b=0 hoặc a=-1 & b=0 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài toán 2: Xác định tham số để hai phương trình lượng giác tương đương.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho hai phương trình

$$f(x, m)=0 \qquad (1)$$

$$g(x, m)=0 \qquad (2)$$

Xác định tham số để (1) và (2) tương đương.

Ta lựa chọn theo hai hướng sau:

Hướng 1: Nếu (1) & (2) đều giải được.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giải (1) để tìm tập nghiệm D_1.
Giải (2) để tìm tập nghiệm D_2.

Bước 2: Thiết lập điều kiện để $D_1=D_2$.

Hướng 2: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ

Bước 1: *Điều kiện cần*

- Giải và tìm nghiệm $x=x_0$ của (1).
- Để phương trình (1) & (2) tương đương, trước hết cần $x=x_0$ cũng là nghiệm của (2), tức là:

$$g(x_0, m)=0 \Rightarrow m=m_0.$$

- Vậy $m=m_0$ chính là điều kiện cần.

Bước 2: *Điều kiện đủ*

- Với $m=m_0$

$(1) \Leftrightarrow f(x, m_0)=0 \Rightarrow$ nghiệm của (1)

$(2) \Leftrightarrow g(x, m_0)=0 \Rightarrow$ nghiệm của (2)

- Kết luận.

Ví dụ 4: (Đề 10): Tìm m để hai phương trình sau tương đương:

$$2\cos2x.\cos x=1+\cos2x+\cos3x \qquad (1)$$

$$4\cos^2x-\cos3x=m\cos x+(4-m)(1+\cos2x). \qquad (2)$$

Giải

Giải (1): Ta được:

$$\cos3x+\cos x=2\cos^2x+\cos3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Giải (2): Ta được:

$$4\cos^2x-(4\cos^3x-3\cos x)=m\cos x+2(4-m)\cos^2x$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3x-2(m-2)\cos^2x+(m-3)\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow [4\cos^2x-2(m-2)\cos x+(m-3)]\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow [4\cos x-2(m-3)](\cos x-\frac{1}{2})\cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = \frac{1}{2}\\ \cos x = \frac{m-3}{2}\end{array}\right.$$

Vậy để (1) và (2) tương đương điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{m-3}{2}=0\\ \frac{m-3}{2}=\frac{1}{2}\\ \left|\frac{m-3}{2}\right|>1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=3\\ m=4\\ m<1\\ m>5\end{array}\right..$$

Vậy với $\in(-\infty, 1)\cup(5, +\infty)\cup\{3, 4\}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 5: (Đề 10): Tìm m để hai phương trình sau tương đương:

$$\sin x.\cos2x=\sin2x.\cos3x-\frac{1}{2}\sin5x. \qquad (1)$$

$$m.\cos2x + |m|.\cos4x + \cos6x=1. \qquad (2)$$

Giải

Điều kiện cần

Giải (1): Ta được:

$$\frac{1}{2}(\sin3x-\sin x)=\frac{1}{2}(\sin5x-\sin x)-\frac{1}{2}\sin5x$$

$$\Leftrightarrow \sin3x=0 \Leftrightarrow 3x=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{3}, k\in Z$$

Do đó (1) & (2) tương đương trước hết cần x=0 (là một nghiệm của họ $x=\frac{k\pi}{3}$) cũng là nghiệm của (2), tức là:

$$m.\cos0 + |m|.\cos0 + \cos0 = 1 \Leftrightarrow m+|m|=0 \Leftrightarrow m\le0.$$

Đó chính là điều kiện cần của a và b.

Điều kiện đủ

- Với m=0, ta được:

$(2) \Leftrightarrow \cos6x=1 \Leftrightarrow 1-2\sin^2 3x=1 \Leftrightarrow \sin3x=0 \Leftrightarrow 3x=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{3},\ k\in Z$

Vậy m=0 thoả mãn điều kiện đầu bài.

- Với m<0, ta được:

$(2) \Leftrightarrow m.\cos2x-m.\cos4x+\cos6x=1$

$\Leftrightarrow \cos6x-1-m(\cos4x-\cos2x)=0 \Leftrightarrow -2\sin^2 3x+2m\sin3x.\sin x=0$

$$\Leftrightarrow (\sin3x-m\sin x)\sin3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x=0\\ 3\sin x-4\sin^3 x-m.\sin x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x=k\pi\\ 4\sin^2 x-m+3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{3}\\ \sin^2 x=\frac{3-m}{4}\quad(3)\end{array}\right.$$

Từ đó để (2) chỉ có nghiệm $x=\frac{k\pi}{3}$, thì điều kiện là (3) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{3-m}{4}<0\\ \frac{3-m}{4}>1\end{array}\right. \overset{m<0}{\Leftrightarrow} \frac{3-m}{4}<1 \Leftrightarrow m<-1.$$

Vậy với m=0 hoặc m<-1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (Đề 40): Tìm m để hai phương trình sau tương đương:

$3\cos x+\cos2x-\cos3x+1=2\sin x.\sin2x \qquad (1)$

$m.\cos3x+(4-8m)\sin^2 x+(7m-4)\cos x+8m-4=0. \qquad (2)$

BÀI GIẢI

Giải (1): Ta được:

$3\cos x+2\cos^2 x-\cos3x=\cos x-\cos3x$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x+\cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=-1\end{array}\right.$$

Giải (2): Ta được:

$m.(4\cos^3 x-3\cos x)+(4-8m)(1-\cos^2 x)+(7m-4)\cos x+8m-4=0$

$\Leftrightarrow 4m\cos^3 x+4(2m-1)\cos^2 x+4(m-1)\cos x=0$

$\Leftrightarrow [m\cos^2 x+(2m-1)\cos x+m-1]\cos x=0$

$$\Leftrightarrow (m\cos x+m-1)(\cos x+1)\cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=-1\\ m\cos x=1-m\end{array}\right.$$

Vậy để (1) và (2) tương đương điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l}m=0\\ \left\{\begin{array}{l}m\neq0\\ \left[\begin{array}{l}\frac{1-m}{m}=0\\ \frac{1-m}{m}=-1\\ \left|\frac{1-m}{m}\right|>1\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m<\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Bài 2: (Đề 117): Tìm a, b để hai phương trình sau tương đương:

$a.\sin2x+\sqrt{2}=2\cos x+a\sqrt{2}\sin x \qquad (1)$

$2\sin^2 x+\cos2x+\sin2x+b=2b\sin x+\cos x+1 \qquad (2)$

BÀI GIẢI

Giải (1): Ta được:

$2a.\sin x.\cos x-2\cos x=a\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2(a.\sin x-1).\cos x=\sqrt{2}(a.\sin x-1)$

$$\Leftrightarrow (a.\sin x-1)(\sqrt{2}\cos x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a.\sin x=1\\ \cos x=1/\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Giải (2): Ta được:

$1-\cos2x+\cos2x+\sin2x+b=2b\sin x+\cos x+1$

$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x+b=2b\sin x+\cos x \Leftrightarrow 2(\cos x-b).\sin x=\cos x-b$

$$\Leftrightarrow (\cos x-b)(2\sin x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sin x=1\\ \cos x=b\end{array}\right.$$

Vậy để (1) và (2) tương đương điều kiện là a=2 & $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm giá trị của m để hai phương trình tương đương.

$\cos2x+\sin x-1=0$

$m\sin3x+(m-2)\cos2x-(m+2)\sin x+2-m=0$

Bài tập 2. Tìm giá trị của m để hai phương trình tương đương.

$$2\cos x.\cos 2x=1+\cos 2x+\cos 3x$$

$$4\cos^2 x-\cos 3x=a\cos x+(4-a)(1+\cos 2x)$$

Bài tập 3. Tìm giá trị của m để hai phương trình tương đương.

$$\cos 3x=4\cos(3\pi+x)$$

$$m\cos^2 x+(1-m)\sin(\frac{\pi}{2}+x)=0$$

Bài tập 4. Xác định a, b để hai phương trình sau tương đương:

$$\sin 3x+\cos 2x=1+2\sin x.\cos 2x$$

$$\sin 3x=a\sin x+(4-2a)\sin^2 x.$$

Bài tập 5. Xác định a, b để hai phương trình sau tương đương:

$$a\sin 2x-2\sqrt{3}=a\sqrt{3}\cos x-4\sin x$$

$$\sin 2x+\cos 2x+b\sqrt{2}+1=\sqrt{2}\sin x+2\cos x(\cos x+b)$$

CHƯƠNG II

HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

CHỦ ĐỀ 1

CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x)\pm f(y)=m \\ x\pm y=\alpha \end{cases},$$

với f(x) là một hàm số lượng giác của x.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta xét các hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x\pm\sin y=m \\ x\pm y=\alpha \end{cases}, \qquad \begin{cases} \cos x\pm\cos y=m \\ x\pm y=\alpha \end{cases},$$

$$\begin{cases} tgx\pm tgy=m \\ x\pm y=\alpha \end{cases}, \qquad \begin{cases} \cot gx\pm\cot gy=m \\ x\pm y=\alpha \end{cases}.$$

Ta chuyển tổng f(x)±f(y)=m thành tích bằng một trong các công thức:

- $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$
- $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$
- $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$
- $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$
- $tgx\pm tgy=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x.\cos y}$
- $cotgx\pm cotgy=\frac{\sin(x\pm y)}{\sin x.\sin y}$

Chú ý: Phương pháp chung là nếu biết tổng x+y thì cần tìm hiệu x-y hay ngược lại, bằng các công thức biến đổi, tức là:

- Ta đi biến đổi phương trình:

$$f(x)\pm f(y)=m \Leftrightarrow g_1(x+y).g_2(x-y)=m_1. \qquad (*)$$

- Từ đó thay phương trình x±y=α vào (*) để tìm biểu thức còn lại.

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = m & (1) \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} & (2) \end{cases}$$

a. Giải hệ với m=1.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}=m \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2\sin\frac{\pi}{6}.\cos\frac{x-y}{2}=m \Leftrightarrow \cos\frac{x-y}{2}=m. \quad (3)$$

a. Với m=1, ta được:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2}=1 \\ x+y=\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-y}{2}=2k\pi \\ x+y=\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=4k\pi \\ x+y=\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{6}-2k\pi \end{cases}, k\in Z$$

b. Hệ có nghiệm

$\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $\Leftrightarrow |m|\le 1$.

Vậy với $|m|\le 1$ hệ có nghiệm.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} & (1) \\ x - y = -\dfrac{\pi}{4} & (2) \end{cases}$$

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$\sin x+\sin(\frac{\pi}{2}-y)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2\sin(\frac{x-y}{2}+\frac{\pi}{4}).\cos(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \sin\frac{\pi}{8}.\cos(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{4}. \quad (3)$$

Ta có:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}=1-2\sin^2\frac{\pi}{8} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow \cos(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}=\cos\frac{\pi}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{8}+2k\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=\dfrac{3\pi}{4}+4k\pi \\ x+y=\dfrac{\pi}{4}+4k\pi \end{array}\right.$$

Do đó hệ tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=\dfrac{3\pi}{4}+4k\pi \\ x-y=-\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4}+4k\pi \\ x-y=-\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \\ y=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x=2k\pi \\ y=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases} \end{array}\right., k\in Z$$

Ví dụ 3: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} tgx - tgy = m & (1) \\ x + y = \dfrac{3\pi}{4} & (2) \end{cases}$$

a. Giải hệ với m=2.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \ne 0 \\ \cos y \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ y \ne \dfrac{\pi}{2}+l\pi \end{cases}, k, l\in Z.$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$\frac{\sin(x-y)}{\cos x.\cos y}=m \Leftrightarrow \sin(x-y)=\frac{m}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2\sin(x-y)-m\cos(x-y)=-\frac{m\sqrt{2}}{2}. \quad (3)$$

a. Với m=2, ta được:

$$(3) \Leftrightarrow \sin(x-y)-\cos(x-y)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x-y-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x-y-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ x-y-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi \\ x-y=\dfrac{17\pi}{12}+2k\pi \end{array}\right.$$

Do đó hệ tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi\\ x+y=\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=\dfrac{17\pi}{12}+2k\pi\\ x+y=\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\\ y=\dfrac{\pi}{3}-k\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{13\pi}{12}+k\pi\\ y=-\dfrac{\pi}{3}-k\pi\end{cases}\end{array}\right., k\in Z$$

b. Hệ có nghiệm

$$\Leftrightarrow (3) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow a^2+b^2\geq c^2 \Leftrightarrow 4+m^2\geq\frac{m^2}{2} \Leftrightarrow 8+m^2\geq 0 \text{ luôn đúng}$$

Vậy hệ có nghiệm với mọi m.

Bài toán 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}f(x).g(y)=m\\ x\pm y=\alpha\end{cases},$$

với f(x) là một hàm số lượng giác của x.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta xét các hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sin x.\sin y=m\\ x\pm y=\alpha\end{cases},\qquad \begin{cases}\cos x.\cos y=m\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x.\cos y=m\\ x\pm y=\alpha\end{cases},\qquad \begin{cases}tgx.tgy=m\\ x\pm y=\alpha\end{cases},$$

Ta chuyển tích f(x).g(y)=m thành tổng bằng một trong các công thức:

$\sin x.\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$ $\qquad \sin x.\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$

$\cos x.\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$ $\qquad \cos x.\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$

Ví dụ 4: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases}tgx.tgy=m & (1)\\ x+y=\dfrac{\pi}{3} & (2)\end{cases}$$

a. Giải hệ với m=3.
b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos y\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ y\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}, k\in Z$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{\sin y}{\cos y}=m \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]=\frac{m}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \cos(x-y)-\cos\frac{\pi}{3}=m[\cos\frac{\pi}{3}+\cos(x-y)] \Leftrightarrow (1-m)\cos(x-y)=\frac{m+1}{2} \quad (3)$$

a. Với m=3, ta được:

$$(3) \Leftrightarrow -2\cos(x-y)=2 \Leftrightarrow \cos(x-y)=-1 \Leftrightarrow x-y=\pi+2k\pi, k\in Z.$$

Do đó hệ tương đương với:

$$\begin{cases}x-y=\pi+2k\pi\\ x+y=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi\\ y=-\dfrac{\pi}{3}-k\pi\end{cases}, k\in Z$$

b. Ta xét hai trường hợp

- Với 1-m=0 ⇔ m=1, khi đó:
  (3) ⇔ 0=1 mâu thuẫn ⇒ hệ vô nghiệm.
- Với 1-m≠0 ⇔ m≠1
  Khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow \cos(x-y)=\frac{m+1}{2(1-m)}. \quad (4)$$

Hệ có nghiệm

$$\Leftrightarrow (4) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow \left|\frac{m+1}{2(1-m)}\right|\leq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\geq 3\\ m\leq\dfrac{1}{3}\end{array}\right..$$

Vậy với $m\in(-\infty, \frac{1}{3}]\cup[3, +\infty)$ hệ có nghiệm.

Ví dụ 5: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sin x.\sin y=m & (1)\\ x-y=\dfrac{\pi}{3} & (2)\end{cases}$$

a. Giải hệ với $m=\frac{1}{2}$.
b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]=m \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \cos\frac{\pi}{3}-\cos(x+y)=2m$$

$$\Leftrightarrow \cos(x+y)=\frac{1-4m}{2}. \quad (3)$$

Với $m=\frac{1}{2}$, ta được:

$$(3) \Leftrightarrow \cos(x+y)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x+y=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in Z.$$

Do đó hệ tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\\ x-y=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\\ x-y=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ y=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ y=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\end{array}\right., k\in Z$$

b. **Hệ có nghiệm**

$\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $\Leftrightarrow \left|\dfrac{1-4m}{2}\right|\le 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}\le m\le\dfrac{3}{4}$.

Vậy với $-\dfrac{1}{4}\le m\le\dfrac{3}{4}$ hệ có nghiệm.

Bài toán 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{f(x)}{f(y)}=m & (1)\\ x\pm y=\alpha & (2)\end{cases},$$

với f(x) là một hàm số lượng giác của x.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện cho f(y)≠0.

Bước 2: Biến đổi (1) dựa vào phương pháp luận hệ số để làm xuất hiện (2) và biểu thức còn lại.

Bước 3: Tìm nghiệm của hệ.

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sin y}=2 & (1)\\ 3(x+y)=2\pi & (2)\end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\sin y\neq 0 \Leftrightarrow y\neq k\pi, k\in Z$

Biến đổi (1) về dạng:

$\sin x=2\sin y \Leftrightarrow 2\sin x=4\sin y \Leftrightarrow 3(\sin x-\sin y)=\sin x+\sin y$

$\Leftrightarrow 6\cos\dfrac{x+y}{2}.\sin\dfrac{x-y}{2}=2\sin\dfrac{x+y}{2}.\cos\dfrac{x-y}{2}$

$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} 3\cos\dfrac{\pi}{3}.\sin\dfrac{x-y}{2}=\sin\dfrac{\pi}{3}.\cos\dfrac{x-y}{2}$

$\Leftrightarrow \text{tg}\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \dfrac{x-y}{2}=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \Leftrightarrow x-y=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z.$

Do đó hệ tương đương với:

$$\begin{cases}x-y=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\\ x+y=\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\\ y=\dfrac{\pi}{6}-k\pi\end{cases}, k\in Z$$

Ví dụ 7: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{\text{tg}x}{\text{tg}y}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} & (1)\\ x+y=\dfrac{\pi}{4} & (2)\end{cases}$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos y\neq 0\\ \text{tg}y\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin 2y\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ y\neq\dfrac{l\pi}{2}\end{cases}, k, l\in Z$$

Biến đổi (1) về dạng:

$\dfrac{\sin x.\cos y}{\sin y.\cos x}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin x.\cos y-\sin y.\cos x=-\sqrt{2}\,(\sin x.\cos y+\sin y.\cos x)$

$\Leftrightarrow \sin(x-y)=-\sqrt{2}\sin(x+y) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \sin(x-y)=-\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sin(x-y)=-1$

$\Leftrightarrow x-y=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$

Do đó hệ tương đương với:

$$\begin{cases}x-y=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\\ x+y=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{8}+k\pi\\ y=\dfrac{3\pi}{8}-k\pi\end{cases}, k\in Z$$

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\cos(\pi x).\cos(\pi y)=\dfrac{\sqrt{2}}{2} & (1)\\ x-y=-\dfrac{1}{4} & (2)\end{cases}$$

BÀI GIẢI

Biến đổi (1) về dạng:

$\dfrac{1}{2}\{\cos[\pi(x+y)]+\cos[\pi(x-y)]\}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \cos[\pi(x+y)]+\cos(-\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos[\pi(x+y)]=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \pi(x+y)=\pm\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \Leftrightarrow x+y=\pm\dfrac{1}{4}+2k$

Do đó hệ tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=\dfrac{1}{4}+2k\\ x-y=-\dfrac{1}{4}\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-\dfrac{1}{4}+2k\\ x-y=-\dfrac{1}{4}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=k\\ y=\dfrac{1}{4}+k\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{1}{4}+k\\ y=k\end{cases}\end{array}\right., k\in Z.$$

Bài 2: (ĐHKT TPHCM - '93): Giải và biện luận theo α hệ phương trình:

$$\begin{cases}2(\cos 2x+\cos 2y)=1+4\cos^2(x-y) & (1)\\ x-y=\alpha & (2)\end{cases}$$

BÀI GIẢI

Biến đổi (1) về dạng:

$4\cos(x+y).\cos(x-y)=1+4\cos^2(x-y) \Leftrightarrow 4\cos(x+y).\cos\alpha=1+4\cos^2\alpha$ (3)

$\Leftrightarrow [\cos(x+y)-2\cos\alpha]^2+\sin^2(x+y)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos(x+y)-2\cos\alpha=0\\ \sin^2(x+y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos(x+y)=1\\ 2\cos\alpha=1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos(x+y)=-1\\ 2\cos\alpha=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=2k\pi\\ \alpha=\pm\dfrac{\pi}{3}+2l\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=\pi+2k\pi\\ \alpha=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2l\pi\end{cases}\end{array}\right.$$

- Với $\alpha=\dfrac{\pi}{3}+2l\pi$, $l\in Z$, hệ có dạng:

$$\begin{cases}x+y=2k\pi\\ x-y=\dfrac{\pi}{3}+2l\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+(k+l)\pi\\ y=-\dfrac{\pi}{6}+(k-l)\pi\end{cases}, k, l\in Z.$$

- Với $\alpha=-\dfrac{\pi}{3}+2l\pi$, $l\in Z$, hệ có dạng:

$$\begin{cases}x+y=2k\pi\\ x-y=-\dfrac{\pi}{3}+2l\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{6}+(k+l)\pi\\ y=\dfrac{\pi}{6}+(k-l)\pi\end{cases}, k, l\in Z.$$

- Với $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}+2l\pi$, $l\in Z$, hệ có dạng:

$$\begin{cases}x+y=2k\pi\\ x-y=\dfrac{2\pi}{3}+2l\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{3}+(k+l)\pi\\ y=-\dfrac{\pi}{3}+(k-l)\pi\end{cases}, k, l\in Z.$$

- Với $\alpha=-\dfrac{2\pi}{3}+2l\pi$, $l\in Z$, hệ có dạng:

$$\begin{cases}x+y=2k\pi\\ x-y=-\dfrac{2\pi}{3}+2l\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{3}+(k+l)\pi\\ y=\dfrac{\pi}{3}+(k-l)\pi\end{cases}, k, l\in Z.$$

- Ngoài ra hệ vô nghiệm.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases}\sin x+.\sin y=3/2\\ x+y=\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}$　　b. $\begin{cases}\sin x.\sin y=\sqrt{3}/2\\ x+y=\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}$.

Bài tập 2: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases}tgx+tgy=1\\ x+y=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$.　　b. $\begin{cases}x+y=\pi/3\\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=-2\end{cases}$.

Bài tập 3: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases}\cos x+\cos y=2m\\ x-y=\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}.$$

a. Giải hệ với m=-1.
b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Bài tập 4: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sin x.\sin y=2m\\ x+y=\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}.$$

a. Giải hệ với m=1.
b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Bài tập 5: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases}tgx.tgy=m\\ x-y=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}.$$

a. Giải hệ với m=3.
b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Bài tập 6: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases}x-y=\dfrac{\pi}{3}\\ \cos^2 x+\cos^2 y=2m+1\end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình khi $m=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

b. Xác định m để hệ trên có nghiệm

Bài tập 7: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=a \\ tgx+tgy=b \end{cases}.$$

a. Giải hệ trên khi $a=\frac{5\pi}{12}$; $b=2$

b. Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm

Bài tập 8: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\cos 6x-\cos 2y=a \\ 3x-2y=\frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

a. Giải hệ khi a = -3

b. Xác định a để hệ có nghiệm

Bài tập 9: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=a \\ \sin x.\sin y=b \end{cases}.$$

Tìm b để hệ có nghiệm với mọi a. tìm nghiệm đó.

Bài tập 10: Giải và biện luận hệ phương trình

a. $\begin{cases} \cos^2 x+\cos^2 y=m \\ x+y=2\pi \end{cases}.$

b. $\begin{cases} \sin^2 x-\sin^2 y=m \\ x+y=\alpha \end{cases}.$

c. $\begin{cases} \sin^2 x-\sin^2 y=m \\ x+y=\frac{2\pi}{3} \end{cases}.$

d. $\begin{cases} \sin^2 x+\sin^2 y=1-\cos\alpha \\ x+y=\alpha \end{cases}.$

e. $\begin{cases} x+y=a \\ 2(\sin^2 x+\sin^2 y)=2-\sin 2a \end{cases}$

f. $\begin{cases} tgx.tgz=3 \\ tgy.tgz=6 \\ x+y+z=\pi \end{cases}.$

Bài tập 11: Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm.

$$\begin{cases} x+y=a \\ \sin^2 x.\sin^2 y=b \end{cases}.$$

Bài tập 12: Xác định a để hệ có nghiệm.

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3} \\ \cos x.\cos y=a \end{cases}.$$

Bài tập 13: (ĐHQG TPHCM Khối D - 99): Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ 2\sin^2 x+2\cos^2 y=2m+1 \end{cases}.$$

a. Giải hệ với m=0.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

CHỦ ĐỀ 2

CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MỰC

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp cộng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với hệ dạng:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

Ta sử dụng phép biến đổi tương đương:

$$\begin{cases} f(x,y)+g(x,y)=0 \\ f(x,y)-g(x,y)=0 \end{cases}$$

từ đó sử dụng được các công thức lượng giác, thông thường là công thức cộng.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x.\cos y=-\frac{1}{2} \\ \cos x.\sin y=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Giải

Biến đổi tương đương hệ bằng cách cộng và trừ vế với vế hai phương trình đã cho, ta được:

$$\begin{cases} \sin x.\cos y+\cos x.\sin y=0 \\ \sin x.\cos y-\cos x.\sin y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y)=0 \\ \sin(x-y)=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=k\pi \\ x-y=-\frac{\pi}{2}+2l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{4}+(\frac{k}{2}+l)\pi \\ y=\frac{\pi}{4}+(\frac{k}{2}-l)\pi \end{cases}, k, l\in Z.$$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin^4 x=\cos x.\cos y \\ \cos^4 x=\sin x.\sin y \end{cases}.$$

Giải

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} \sin^4 x+\cos^4 x=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y \\ \sin^4 x-\cos^4 x=\cos x.\cos y-\sin x.\sin y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x = \cos(x-y) \\ -\cos 2x = \cos(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+\cos 4x = 4\cos(x-y) & (1) \\ \cos 2x = \cos(\pi - x - y) & (2) \end{cases}$$

Giải (2), ta được:

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \pi - x - y + 2k\pi \\ 2x = -\pi + x + y + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 4x - \pi - 2k\pi \\ x - y = -\pi + 2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

- Với $x-y=4x-\pi-2k\pi$, thay vào (1) ta được:

$$3+\cos4x=4\cos(4x-\pi-2k\pi) \Leftrightarrow 3+\cos4x=-4\cos4x$$

$$\Leftrightarrow \cos4x=-\frac{3}{5}=\cos4\alpha \Leftrightarrow 4x=\pm4\alpha+2l\pi \Leftrightarrow x=\pm\alpha+\frac{l\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + \frac{l\pi}{2} \ \ \& \ \ y = \pi - 3\alpha + (2k - \frac{3l}{2})\pi \\ x = -\alpha + \frac{l\pi}{2} \ \ \& \ \ y = \pi + 3\alpha + (2k - \frac{3l}{2})\pi \end{array}\right., l\in Z.$$

- Với $x-y=\pi+2k\pi$, thay vào (1) ta được:

$$3+\cos4x=4\cos(\pi+2k\pi) \Leftrightarrow 3+\cos4x=-4$$

$$\Leftrightarrow \cos4x=-7 \text{ vô nghiệm}$$

Vậy hệ có nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} x = \alpha + \frac{l\pi}{2} \ \ \& \ \ y = \pi - 3\alpha + (2k - \frac{3l}{2})\pi \\ x = -\alpha + \frac{l\pi}{2} \ \ \& \ \ y = \pi + 3\alpha + (2k - \frac{3l}{2})\pi \end{array}\right., l\in Z.$$

Ví dụ 3: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x.\cos y = m \\ 3\text{tg}x = \text{tg}y \end{cases}$$

a. (Đề 12): Giải hệ phương trình với $m=\frac{1}{4}$.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases}, k, l\in Z. \qquad (*)$$

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} \sin x.\cos y = m \\ 3\sin x.\cos y = \sin y.\cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x.\cos y = m \\ \sin y.\cos x = 3m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x.\cos y + \cos x.\sin y = m \\ \sin x.\cos y - \cos x.\sin y = -2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 4m \\ \sin(x-y) = -2m \end{cases} \qquad (I)$$

a. Với $m=\frac{1}{4}$, ta được:

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \sin(x-y) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = k\pi \\ \left[\begin{array}{l} x - y = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi \\ x - y = \frac{7\pi}{6} + 2l\pi \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + \frac{(k+2l)\pi}{2} \ \& \ y = \frac{\pi}{12} + \frac{(k-2l)\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{12} + \frac{(k+2l)\pi}{2} \ \& \ y = -\frac{7\pi}{12} + \frac{(k-2l)\pi}{2} \end{array}\right., k, l\in Z \text{ thoả mãn } (*).$$

b. Hệ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (I) \text{ có nghiệm} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ |4m| \leq 1 \\ |-2m| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m\in[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]\backslash\{0\}.$$

Vậy với $m\in[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]\backslash\{0\}$ hệ có nghiệm.

Bài toán 2: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phép khử sau khi bình phương.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1 Với hệ dạng:

$$\begin{cases} \sin x = f(y) & (1) \\ \cos x = g(y) & (2) \end{cases}$$

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Bình phương (1) và (2) rồi cộng lại để thu được phương trình hệ quả:

$$f^2(y)+g^2(y)=1 \qquad (3)$$

Bước 2: Giải (3) để nhận được y, rồi thay vào (1) và (2) để thu được x.

Chú ý: Nếu ta chỉ dùng (1) hoặc (2) để tính x, ta có thể thu được nghiệm ngoại lai, vì ở bước 1 ta đã thực hiện một phép biến đổi không tương đương.

2 Với hệ dạng:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\cos x}=f(y) & (1)\\ \text{tgx}=g(y) & (2)\end{cases}\quad \text{hoặc}\quad \begin{cases}\dfrac{1}{\sin x}=f(y) & (1)\\ \cot gx=g(y) & (2)\end{cases}$$

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Bình phương (1) và (2) rồi trừ theo vế để thu được phương trình hệ quả:

$$f^2(y)-g^2(y)=1 \qquad (3)$$

Bước 2: Giải (3) để nhận được y, rồi thay vào (1) và (2) để thu được x.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}2\sin x=\sin y & (1)\\ 2\cos x+\cos y=1 & (2)\end{cases}$$

Giải

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases}2\sin x=\sin y\\ 2\cos x=1-\cos y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4\sin^2 x=\sin^2 y\\ 4\cos^2 x=(1-\cos y)^2\end{cases}$$

$$\overset{+}{\Rightarrow} 4=2-2\cos y \Leftrightarrow \cos y=-1 \Leftrightarrow y=\pi+2k\pi,\ k\in Z. \qquad (3)$$

Thay (3) vào hệ, ta được:

$$\begin{cases}2\sin x=\sin(\pi+2k\pi)\\ 2\cos x+\cos(\pi+2k\pi)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin x=0\\ 2\cos x-1=1.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=0\\ \cos x=1\end{cases}\Leftrightarrow \cos x=1 \Leftrightarrow x=2l\pi,\ l\in Z.$$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases}x=2l\pi\\ y=\pi+2k\pi\end{cases},\ k,l\in Z.$$

Ví dụ 5: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}\sin x=m.\sin^3 y & (1)\\ \cos x=m.\cos^3 y & (2)\end{cases}$$

Giải

Bình phương (1) và (2) rồi cộng lại, thu được:

$$1=(m.\sin^3y)^2+(m.\cos^3y)^2 \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow 1=m^2[(\sin^2y+\cos^2y)^3-3(\sin^2y+\cos^2y)\sin^2y.\cos^2y]$$

$$=m^2(1-\frac{3}{4}\sin^2 2y)=m^2[1-\frac{3}{8}(1-\cos4y)]=m^2(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos4y)$$

$$\overset{m\neq0}{\Leftrightarrow} \cos4y=\frac{8-5m^2}{3m^2}. \qquad (3)$$

Để hệ có nghiệm trước hết (3) phải có nghiệm, ta được:

$$\left|\frac{8-5m^2}{3m^2}\right|\le1 \Leftrightarrow 1\le|m|\le2.$$

Với điều kiện đó (3) có nghiệm y_0 thoả mãn (*), tức là tồn tại x_0 sao cho:

$$\begin{cases}\sin x_0=m.\sin^3 y_0\\ \cos x_0=m.\cos^3 y_0\end{cases}$$

tức là (x_0, y_0) là nghiệm của hệ đã cho.

Vậy với $1\le|m|\le2$, hệ có nghiệm.

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\cos x}=\sqrt{5\cos^5 y} & (1)\\ \text{tgx}=\sqrt{4-\sin^3 y} & (2)\end{cases}$$

Giải

Bình phương (1) và (2) rồi trừ theo vế, thu được:

$$1=5\cos^5y-4+\sin^3y \Leftrightarrow 5\cos^5y+\sin^3y=5. \qquad (3)$$

Ta có nhận xét:

$$5\cos^5y+\sin^3y\le5|\cos^5y|+|\sin^3y|=4|\cos^5y|+(|\cos^5y|+|\sin^3y|)$$

$$\le4.1+(|\cos^2y|+|\sin^2y|)=5$$

Do đó (3) có nghiệm khi

$$\begin{cases}5\cos^5 y+\sin^3 y=5|\cos^5 y|+|\sin^3 y|\\ |\cos^5 y|=1\\ |\cos^5 y|+|\sin^3 y|=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos y=1 \Leftrightarrow y=2k\pi,\ k\in Z. \qquad (4)$$

Thay (4) vào hệ, ta được:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\cos x}=\sqrt{5}\\ \text{tgx}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\cos\alpha,\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\\ \sin x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ x=α+2lπ, l∈Z.

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases}x=\alpha+2l\pi\\ y=2k\pi\end{cases},\ k,\ l\in Z.$$

Bài toán 3: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bằng phép đặt ẩn phụ thích hợp ta sẽ chuyển hệ phương trình lượng giác về hệ đại số quen thuộc.

Ví dụ 7: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=3m\\ \sin^2 x+\sin^2 y=\dfrac{5m}{2}\end{cases}$$

a. Giải hệ với m=$\frac{1}{2}$.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Giải

Đặt:

$$\begin{cases}u=\sin x\\ v=\sin y\end{cases},\ \text{điều kiện } |u|\le 1,\ |v|\le 1. \qquad (*)$$

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases}u+v=3m\\ u^2+v^2=\dfrac{5m}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=3m\\ (u+v)^2-2uv=\dfrac{5m}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=3m\\ uv=\dfrac{18m^2-5m}{4}\end{cases}$$

suy ra u, v là nghiệm của phương trình:

$$t^2-3mt+\frac{18m^2-5m}{4}=0\Leftrightarrow f(t)=4t^2-12mt+18m^2-5m=0. \qquad (1)$$

a. Với m=$\frac{1}{2}$, ta được:

(1) $\Leftrightarrow$ $2t^2-3t+1=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&t=1\\ &t=\frac{1}{2}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\begin{cases}\sin x=1\\ \sin y=\dfrac{1}{2}\end{cases}\\ &\begin{cases}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \sin y=1\end{cases}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\\ y=\dfrac{\pi}{6}+2l\pi\ \vee\ y=\dfrac{5\pi}{6}+2l\pi\end{cases}\\ &\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\ \vee\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\\ y=\dfrac{\pi}{2}+2l\pi\end{cases}\end{aligned}\right.,\ k,\ l\in Z.$$

b. Hệ có nghiệm

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm thoả mãn $-1\le t_1\le t_2\le 1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'\ge 0\\ af(-1)\ge 0\\ af(1)\ge 0\\ -1\le\dfrac{S}{2}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-36m^2+20m\ge 0\\ 18m^2+7m+4\ge 0\\ 18m^2-17m+4\ge 0\\ -1\le\dfrac{3m}{2}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le m\le\dfrac{5}{9}\\ \left[\begin{aligned}&m\ge\dfrac{1}{2}\\ &m\le\dfrac{4}{9}\end{aligned}\right.\\ -\dfrac{2}{3}\le m\le\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&0\le m\le\frac{4}{9}\\ &\frac{1}{2}\le m\le\frac{5}{9}\end{aligned}\right.$$

Vậy với m∈$[0,\ \frac{4}{9}]\cup[\frac{1}{2},\ \frac{5}{9}]$ hệ có nghiệm.

Ví dụ 8: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases}\text{tgx}+\sin y=2a\\ \text{tgx}.\sin y=a^2-1\end{cases}$$

Giải

Đặt:

$$\begin{cases}u=\text{tgx}\\ v=\sin y\end{cases},\ \text{điều kiện } |v|\le 1. \qquad (*)$$

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases}u+v=2a\\ uv=a^2-1\end{cases}$$

suy ra u, v là nghiệm của phương trình:

$t^2-2at+a^2-1=0.$ (1)

Ta có $\Delta'=a^2-a^2+1=1$ do đó (1) luôn có 2 nghiệm:

$$\left[\begin{aligned}&t_1=a-1\\ &t_2=a+1\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\begin{cases}u=a-1\\ v=a+1\end{cases}\quad (I)\\ &\begin{cases}u=a+1\\ v=a-1\end{cases}\quad (II)\end{aligned}\right.$$

Giải (I): Với điều kiện (*), ta được:

$$\begin{cases} tgx = a+1 \\ \sin y = a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tgx = a+1 = tg\alpha_1 \\ \sin y = a-1 = \sin\beta_1 \\ |a-1| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 + k\pi \\ \left[\begin{array}{l} y = \beta_1 + 2l\pi \\ y = \pi - \beta_1 + 2l\pi \end{array}\right. \\ 0 \le a \le 2 \end{cases}, k, l \in Z.$$

Giải (II): Với điều kiện (*), ta được:

$$\begin{cases} tgx = a-1 \\ \sin y = a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tgx = a-1 = tg\alpha_2 \\ \sin y = a+1 = \sin\beta_2 \\ |a+1| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_2 + k\pi \\ \left[\begin{array}{l} y = \beta_2 + 2l\pi \\ y = \pi - \beta_2 + 2l\pi \end{array}\right. \\ -2 \le a \le 0 \end{cases}, k, l \in Z.$$

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin^2 x = 1 - tgy \\ tg^2 y = 1 - \sin x \end{cases}$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \ne 0 \\ \cos y \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ y \ne \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{cases}, k, l \in Z.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \sin x \\ v = tgy \end{cases}, \text{điều kiện } |u| \le 1. \qquad (*)$$

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} u^2 = 1 - v \\ v^2 = 1 - u \end{cases} \Rightarrow u^2\text{-}v^2\text{=}u\text{-}v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u - v = 0 \\ u + v = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ v = 1 - u \end{array}\right.$$

- Với u=v, ta được:

$$\begin{cases} u = v \\ u^2 = 1 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} u\text{=}v\text{=}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \sin\alpha \\ tgy = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = tg\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right. \\ y = \beta + l\pi \end{cases}, k, l \in Z.$$

- Với v=1-u, ta được:

$$\begin{cases} v = 1 - u \\ (1-u)^2 = 1 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - u \\ \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ u = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 1 \\ tgy = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = 0 \\ tgy = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y = l\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{4} + l\pi \end{cases} \end{array}\right., k, l \in Z.$$

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9^{2\cot gx + \sin y} = 3 \\ 9^{\sin y} - 81^{\cot gx} = 2 \end{cases}$$

Giải

Biến đổi hệ về dạng :

$$\begin{cases} 9^{2\cot gx}.9^{\sin y} = 3 \\ 9^{\sin y} - 9^{2\cot gx} = 2 \end{cases}$$

Đặt :

$$\begin{cases} u = 9^{\sin y} \\ v = -9^{2\cot gx} \end{cases}, \text{điều kiện u>0 và v<0}$$

Hệ có dạng:

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ u.v = -3 \end{cases}$$

khi đó u, v là nghiệm của phương trình

$$t^2\text{-}2t\text{-}3\text{=}0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 3 \end{array}\right. \xleftrightarrow{u>0\ \&\ v<0} \begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^{\sin y} = 3 \\ -9^{2\cot gx} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \cot gx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ y = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \\ x = \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + l\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + l\pi \\ y = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, k, l \in Z.$$

Bài toán 4: Giải hệ lặp 3 ẩn

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm tập giá trị của hàm $f(t)$, giả sử là tập I thì x, y, z, f(x
$f(y)=f(f(x))$, $f(z)=f(f(f(x)))\in I$.

Bước 2: Khẳng định rằng hàm số $f(t)$ đơn điệu trên I, giả sử là đồng biến trên I.

Bước 3: Ta đi chứng minh $f(x)=x$.

Thật vậy:

Từ hệ ta có $x= f(f(f(x)))$ và $f(x)$ đồng biến trên I.

Khi đó:

- Nếu $f(x)>x \Leftrightarrow f(f(x))>f(x) \Leftrightarrow f(f(f(x)))>f(f(x))>f(x)>x$
  $\Rightarrow f(f(f(x)))>x$ mâu thuẫn với hệ.
- Nếu $f(x)<x \Leftrightarrow f(f(x))<f(x) \Leftrightarrow f(f(f(x)))<f(f(x))<f(x)<x$
  $\Rightarrow f(f(f(x)))<x$ mâu thuẫn với hệ.

Do đó $f(x)=x$.

Từ đó tìm được nghiệm của hệ.

Ví dụ 11: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-\sin y=0 \\ y-\sin z=0\,. \\ z-\sin x=0 \end{cases}$$

Giải

Xét hàm số $f(t)=\sin x$, khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} x=f(y) \\ y=f(z)\,: \\ z=f(x) \end{cases}$$

Hàm $f(t)$ có tập giá trị là $I=[-1,1]\subset(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Hàm $f(t)$ đồng biến trên $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ hàm $f(t)$ đồng biến trên I.

Ta đi chứng minh $f(x)=x$.

Thật vậy: từ hệ ta có $x= f(f(f(x)))$ và $f(x)$ đồng biến trên I.

- Nếu $f(x)>x \Leftrightarrow f(f(x))>f(x) \Leftrightarrow f(f(f(x)))>f(f(x))>f(x)>x$
  $\Rightarrow f(f(f(x)))>x$ mâu thuẫn với hệ.
- Nếu $f(x)<x \Leftrightarrow f(f(x))<f(x) \Leftrightarrow f(f(f(x)))<f(f(x))<f(x)<x$
  $\Rightarrow f(f(f(x)))<x$ mâu thuẫn với hệ.

Do đó $f(x)=x \Leftrightarrow x-\sin x=0$. (*)

Xét hàm số $g(x)=x-\sin x$

- Miền xác định D=R.
- Đạo hàm:
  $g'=1-\cos x\geq 0, \forall x\in D$
  $\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên D.

Từ đó:

- Với $x=0$, ta có: $g(0)=0 \Leftrightarrow$ phương trình (*) nghiệm đúng.
- Với $x>0$, ta có: $g(x)>g(0)=0 \Leftrightarrow$ phương trình (*) vô nghiệm.
- Với $x<0$, ta có: $g(x)<g(0)=0 \Leftrightarrow$ phương trình (*) vô nghiệm.

Kết luận

- Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.
- Vậy, nghiệm của hệ là $x=y=z=0$.

Bài toán 5: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp điều kiện cần và đủ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Đối với hệ này câu hỏi thường được đặt ra là " Tìm điều kiện của tham số để hệ có nghiệm duy nhất ". Khi đó ta sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ để giải:

Bước 1: *Điều kiện cần*

- Dựa vào tính chất nghiệm của các hàm số lượng giác trong hệ ta có nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì (x_1, y_1) cũng là nghiệm của hệ, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi:

$$\begin{cases} x_0=x_1 \\ y_0=y_1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 \\ y_0 \end{array}\right.$$

$$x_0=-x_0 \Leftrightarrow x_0=0 \qquad (*)$$

- Thay vào hệ ta được giá trị của tham số . Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Bước 2: *Điều kiện đủ*

Ví dụ 12: (Đề 108): Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x^2+y^2=m-5 \\ y+\cos x=2 \end{cases} \qquad (I)$$

Giải.

Điều kiện cần

Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm $(-x_0, y_0)$. Khi đó để hệ có nghiệm duy nhất là :

$$x_0=-x_0 \Leftrightarrow x_0=0 \qquad (*)$$

Với x_0=0, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0^2 = m-5 \\ y_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow m=6.$$

Điều kiện đủ

Với m=6 ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 & (1) \\ y+\cos x=2 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có:

$$\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ -1\le y\le 1 \end{cases} \Rightarrow y+\cos x\le 2.$$

Vậy, hệ có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y=1 \\ \cos x=1 \\ -1\le x\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với m=6 hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 13: (ĐHNT - 94): Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} ax^2+|\sin 2x|+a=y+1 \\ |\text{tg}6x|+2y^2=2 \end{cases} \qquad (I)$$

Giải.

Điều kiện cần

Nhận xét rằng: nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì ($-x_0$, y_0) cũng là nghiệm của hệ.

Do đó hệ có nghiệm duy nhất thì: $x_0=-x_0 \Leftrightarrow x_0=0$.

Với x_0=0 ta suy ra:

$$\begin{cases} a=y+1 \\ 2y^2=2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \end{array}\right.$$

Điều kiện đủ

- Với a=0, hệ có dạng:

$$\begin{cases} |\sin 2x|=y+1 \\ |\text{tg}6x|+2y^2=2 \end{cases} \qquad (I)$$

Nhận xét rằng x=$\frac{k\pi}{2}$, k∈Z và y=-1 luôn là nghiệm của hệ (I). Vậy hệ có vô số nghiệm. Do đó a=0 không thoả mãn.

- Với a=2, hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x^2+|\sin 2x|=y-1 & (1) \\ |\text{tg}6x|=2(1-y^2) & (2) \end{cases} \qquad (II)$$

Từ (1) ⇒ y≥1.

Từ (2) ⇒ -1≤y≤1.

Vậy hệ (II) tương đương với:

$$\begin{cases} y=1 \\ 2x^2+|\sin 2x|=0 \\ |\text{tg}6x|=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy với a=2 hệ có nghiệm duy nhất.

Bài toán 6: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp hàm số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho hệ.

Bước 2: Xét một phương trình nhận được từ hệ (có thể là phương trình hệ quả), sử dụng phương pháp hàm số giải phương trình này.

Bước 3: Chuyển hệ về dạng mới để xác định nghiệm.

Ví dụ 14: (Đề 108): Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x+8y=2\pi,\ 0<x,y<\pi & (1) \\ \cot gx-\cot gy=x-y & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x\ne 0 \\ \sin y\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne k\pi \\ y\ne l\pi \end{cases}, k, l\in Z.$$

Viết lại phương trình (2) dưới dạng:

x-cotgx=y-cotgy. (3)

Xét hàm số f(t)=t-cotgt, với t∈(0, π).

Đạo hàm:

$f'=1+\frac{1}{\sin^2 t}>0$ ⇒ hàm số luôn đồng biến trên (0, π).

Do đó từ (3), ta được:

f(x)=f(y) ⇔ x=y.

Khi đó hệ được chuyển về dạng:

$$\begin{cases} 5x+8y=2\pi \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x=2\pi \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{2\pi}{13}.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 15: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos x - \cos 2y = x - 2y & (1) \\ tgx = 3tgy & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases}, k, l \in Z.$$

Viết lại phương trình (1) dưới dạng:

x-cosx=2y-cos2y. (3)

Xét hàm số f(t)=t-cost, với t∈[0, 2π).

Đạo hàm:

f'=1+sint≥0 ⇒ hàm số luôn đồng biến trên [0, 2π).

Do đó từ (3), ta được:

f(x)=f(2y) ⇔ x=2y.

Khi đó (2) có dạng:

$$tg2y=3tgy \Leftrightarrow \frac{2tgy}{1-tg^2y}=3tgy \Leftrightarrow 3tg^3y-tgy=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgy=0 \\ tgy=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

- Với tgy=0, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = 2y \\ tgy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2l\pi \\ y = l\pi \end{cases}, l \in Z.$$

- Với tgy=$\frac{1}{\sqrt{3}}$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = 2y \\ tgy = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = \frac{\pi}{6} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2l\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + l\pi \end{cases}, l \in Z.$$

- Với tgy=-$\frac{1}{\sqrt{3}}$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = 2y \\ tgy = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = -\frac{\pi}{6} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi \\ y = -\frac{\pi}{6} + l\pi \end{cases}, l \in Z.$$

Bài toán 7: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp đánh giá.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta đánh giá một phương trình nhận được từ hệ dựa trên các dạng:

Dạng 1: Tính chất của các hàm số lượng giác và biểu thức lượng giác.

Dạng 2: Phương trình lượng giác dạng Pitago.

Dạng 3: Sử dụng bất đẳng thức Côsi.

Dạng 4: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski

Ví dụ 16: (Đề 23): Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} tgx + \cot gx = 2\sin(y + \frac{\pi}{4}) \\ tgy + \cot gy = 2\sin(x - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \sin 2y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq k\pi \\ 2y \neq l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{k\pi}{2} \\ y \neq \frac{l\pi}{2} \end{cases}, k, l \in Z.$$

Ta có:

$$tg\alpha+cotg\alpha=\frac{1}{\sin\alpha.\cos\alpha}=\frac{2}{\sin 2\alpha}.$$

do đó hệ được biến đổi về dạng;

$$\begin{cases} \sin(y+\frac{\pi}{4}).\sin 2x = 1 \\ \sin(x-\frac{\pi}{4}).\sin 2y = 1 \end{cases} \overset{|\sin\alpha|\le 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin(y+\frac{\pi}{4}) = \sin 2x = 1 \\ \sin(y+\frac{\pi}{4}) = \sin 2x = -1 \end{array}\right. \\ \sin(x-\frac{\pi}{4}).\sin 2y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4}+k\pi \ \& \ y = \frac{\pi}{4}+2l\pi \\ x = -\frac{\pi}{4}+k\pi \ \& \ y = -\frac{3\pi}{4}+2l\pi \end{array}\right. \\ \sin(x-\frac{\pi}{4}).\sin 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4}+k\pi \ \& \ y = \frac{\pi}{4}+2l\pi \\ \sin k\pi.\sin 2(\frac{\pi}{4}+2l\pi) = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4}+k\pi \ \& \ y = -\frac{3\pi}{4}+2l\pi \\ \sin(-\frac{\pi}{2}+k\pi).\sin 2(-\frac{3\pi}{4}+2l\pi) = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ \& \ y = -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi \\ k = 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi \\ y = -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi \end{cases}, n, l \in Z.$$

Vậy hệ có một họ cặp nghiệm.

Ví dụ 17: (ĐHXD 95) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^{\sin(x+y)\pi} = 1 & (1) \\ 2(x^2 + y^2) = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải

Từ (2) ta có điều kiện

$$\begin{cases} |x| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \\ |y| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Giải (1) ta được:

$$\sin(x+y)\pi = 0 \Leftrightarrow (x+y)\pi = k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow x+y = k,\ k \in Z \qquad (3)$$

Giải (2) ta được:

$$1 = 2(x^2+y^2) \ge (x+y)^2 = k^2 \Rightarrow |k| \le 1 \xleftrightarrow{(3)} k = 0.$$

Vậy hệ được biến đổi thành :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2(x^2 + y^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 2(x^2 + x^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = \pm\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \ \& \ y = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \ \& \ y = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, hệ phương trình có 2 cặp nghiệm $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ và $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Bài toán 8: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp biến đổi hỗn hợp.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho hệ.

Bước 2: Sử dụng các phép biến đổi lượng giác tương ứng, biến đổi hệ hoặc một phương trình trong hệ từ đó thu được một phương trình hệ quả

Giải phương trình hệ quả bằng những phương pháp:

- Tổng bình phương.
- Hàm số
- Đánh giá...

Bước 3: Thay kết quả ở bước 2 vào hệ ta sẽ nhận được nghiệm.

Ví dụ 18: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Giải

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \\ 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow tg\frac{x+y}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x+y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi,\ k \in Z. \qquad (1)$$

Vậy hệ tương đương với:

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ \sin x + \sin(\frac{\pi}{3} - x + 2k\pi) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ \sin x + \sin(\frac{\pi}{3} - x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ 2\sin\frac{\pi}{6}.\cos(\frac{\pi}{6} + x) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ \cos(\frac{\pi}{6} + x) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ \frac{\pi}{6} + x = \pm\frac{\pi}{6} + 2l\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ x = 2l\pi \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} + 2(k-l)\pi \\ x = 2l\pi \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{2\pi}{3} + 2(k-l)\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi \end{cases} \end{array}\right., k, l \in Z.$$

Ví dụ 19: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} tgx - tgy + tgx.tgy = -1 & (1) \\ \sqrt{3}\cos 2x + \cos 2y = -1 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \ne 0 \\ \cos y \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in Z$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$\sin x.\cos y-\sin y.\cos x+\sin x.\sin y=-\cos x.\cos y$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos y-\sin y.\cos x=-(\cos x.\cos y+\sin x.\sin y)$$

$$\Leftrightarrow \sin(x-y)=-\cos(x-y) \Leftrightarrow tg(x-y)=-1 \Leftrightarrow x-y=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+y+k\pi,\ k\in Z. \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta được:

$$\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{2}+2y+2k\pi)+\cos 2y=-1 \Leftrightarrow -\sqrt{3}\sin 2y+\cos 2y=-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2y-\frac{1}{2}\cos 2y=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2y-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2y-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2l\pi \\ 2y-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{\pi}{6}+l\pi \\ y=\frac{\pi}{2}+l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{5\pi}{12}+(k+l)\pi \\ y=\frac{\pi}{6}+l\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{3\pi}{4}+(k+l)\pi \\ y=\frac{\pi}{2}+l\pi \end{cases} \end{array}\right.,\ k,l\in Z.$$

Chú ý: Rất nhiều tài liệu biến đổi (1) như sau:

$$tgx-tgy=-1-tgx.tgy \Leftrightarrow \frac{tgx-tgy}{1+tgx.tgy}=-1 \Leftrightarrow tg(x-y)=-1$$

$$\Leftrightarrow x-y=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$$

nhưng để có được biến đổi như vậy nhất thiết phải xét hai trường hợp $1+tgx.tgy=0$ và $1+tgx.tgy\neq 0$.

II.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (Đề 33): Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=\sqrt{2} \\ \cos x+\cos y=\sqrt{2} \end{cases}.$$

BÀI GIẢI

Bằng cách cộng theo vế hai phương trình của hệ, ta được:

$$(\sin x+\cos x)+(\sin y+\cos y)=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})+\sin(y+\frac{\pi}{4})=2$$

$$\overset{\sin\alpha\leq 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \sin(x+\frac{\pi}{4})=1 \\ \sin(y+\frac{\pi}{4})=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ y+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ y=\frac{\pi}{4}+2l\pi \end{cases},\ k,l\in Z.$$

Thử lại nghiệm trên vào hệ ta thấy luôn đúng.

Vậy hệ có một họ cặp nghiệm.

Bài 2: (ĐHSP Vinh - 99): Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=\frac{3}{2} \\ \sin^2 x+\sin^2 y=\frac{5}{4} \end{cases}$$

BÀI GIẢI

- Đặt:

$$\begin{cases} u=\sin x \\ v=\sin y \end{cases},\ \text{điều kiện } |u|, |v|\leq 1.$$

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} u+v=\frac{3}{2} \\ u^2+v^2=\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=\frac{3}{2} \\ (u+v)^2-2uv=\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=\frac{3}{2} \\ uv=\frac{1}{2} \end{cases}$$

khi đó u, v là nghiệm của phương trình:

$$t^2-\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x=1 \\ \sin y=\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x=\frac{1}{2} \\ \sin y=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ y=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee y=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \\ y=\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có bốn cặp họ nghiệm.

Bài 3: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos x=a.\cos^3 y \\ \sin x=a.\sin^3 y \end{cases} \qquad (I)$$

a. Giải hệ với $a=\frac{1}{2}$.

b. (Đề 126): Tìm a để hệ có nghiệm.

BÀI GIẢI

Ta thực hiện phép biến đổi:

$$\begin{cases} \cos^2 x=a^2.\cos^6 y \\ \sin^2 x=a^2.\sin^6 y \end{cases} \Rightarrow \sin^2x+\cos^2x=a^2(\sin^6y+\cos^6y)$$

$$\Leftrightarrow 1=a^2[(\sin^2y+\cos^2y)^3-3(\sin^2y+\cos^2y)\sin^2y.\cos^2y]$$

$$\Leftrightarrow 1=a^2(1-\frac{3}{4}\sin^2 2y) \Leftrightarrow 3a^2.\sin^2 2y=4(a^2-1). \qquad (1)$$

a. Với $a=\frac{1}{2}$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3}{4}\sin^2 2y=-3 \text{ vô nghiệm}$$

Vậy với $a=\frac{1}{2}$, hệ vô nghiệm.

b. Để hệ có nghiệm trước hết (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \left|\dfrac{4(a^2-1)}{3a^2}\right| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq |a| \leq 2.$$

Với $1\leq|a|\leq2$, giả sử (1) có nghiệm y_0, tức là:

$$3a^2.\sin^2 2y_0=4(a^2-1) \Leftrightarrow a^2(\sin^6 y_0+\cos^6 y_0)=1 \Leftrightarrow (a.\sin^3 y_0)^2+(a.\cos^3 y_0)^2=1$$

tức là hệ (I) luôn có nghiệm x_0.

Vậy với $1\leq|a|\leq2$ hệ đã cho có nghiệm.

Bài 4: (Đề 103): Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases} ax^2+a-1=y-|\sin x| \\ tg^2x+y^2=1 \end{cases} \quad (I)$$

BÀI GIẢI

Điều kiện cần

Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm $(-x_0, y_0)$. Khi đó để hệ có nghiệm duy nhất là

$$x_0=-x_0 \Leftrightarrow x_0=0 \quad (*)$$

Với $x_0=0$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a-1=y_0 \\ y_0^2=1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \end{array}\right.$$

Điều kiện đủ

a. Với a=0 hệ có dạng:

$$\begin{cases} -1=y-|\sin x| \\ tg^2x+y^2=1 \end{cases}$$

hệ có vô số nghiệm dạng:

$$\begin{cases} x=k\pi \\ y=-1 \end{cases}, k\in Z.$$

Vậy a=0 không thoả mãn.

b. Với a=2 hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x^2+1=y-|\sin x| & (1) \\ tg^2x+y^2=1 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có: $y\geq1$ & từ (2) ta có:

$-1\leq y\leq1 \Rightarrow y=1$.

Vậy, hệ có dạng:

$$\begin{cases} y=1 \\ 2x^2=-|\sin x| \\ tg^2x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

là nghiệm duy nhất của hệ.

Vậy, với a=2 hệ có nghiệm duy nhất.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \sin x.\cos y=\dfrac{1}{2} \\ \cos x.\sin y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ b. $\begin{cases} \sin x.\sin y=-\dfrac{1}{4} \\ \cos x.\cos y=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

Bài tập 2: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \sin x+\sin y=-\dfrac{1}{2} \\ \cos x+\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ b. $\begin{cases} \sin x+\sin y=\dfrac{1}{2} \\ \cos x+\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Bài tập 3: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} 3\sin x+2\sin y=0 \\ 3\cos x+2\cos y=\dfrac{5}{2} \end{cases}$ b. $\begin{cases} \sin y=5\sin x \\ 3\cos x+\cos y=2 \end{cases}$

Bài tập 4: Giải các hệ phương trình :

a. $\begin{cases} \sin x+\sin y=\sqrt{2}+a \\ \cos x+\cos y=\sqrt{2}-a \end{cases}$ b. $\begin{cases} tgx+tgy=1 \\ tg\dfrac{x}{2}+tg\dfrac{y}{2}=2 \end{cases}$

Bài tập 5: Giải các hệ phương trình :

a. $\begin{cases} 3(\sin x-\sin y)=4(\sin 2x-\sin 2y) \\ 3(\cos x-\cos y)=4(\cos 2x-\cos 2y) \end{cases}$ b. $\begin{cases} tgx+\sin 2y=\sin 2x \\ 2\sin y.\cos(x-y)=\sin x \end{cases}$

Bài tập 6: Giải các hệ phương trình :

a. $\begin{cases} \cos 2y+\dfrac{1}{2}=(\cos y-\dfrac{1}{2})(1+2\sin 2x) \\ \sin y(tgx+\cot gy)=2\cot gy \end{cases}$

b. $\begin{cases} \sin^2 x - 2\sin x.\cos 2y = \cos\dfrac{x+y}{2} + \cos\dfrac{x-y}{2} + 2 \\ \cos^2 2y + \dfrac{1}{2}(\cos x + \cos y) - 1 = 0 \end{cases}$

Bài tập 7: Giải các hệ phương trình :

a. $\begin{cases} \sin \pi x.\cos \pi y = \dfrac{1}{4}, 0 < x+y < 2. \\ 3\text{tg}\pi x = \text{tg}\pi y \end{cases}$

b. $\begin{cases} \sin \pi x.\sin \pi y = \dfrac{3}{4} \\ \text{tg}\pi x.\text{tg}\pi y = 3 \end{cases}$

Bài tập 8: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos x.\cos y = m + 1 \\ \sin x.\sin y = 4m^2 + 2m \end{cases}$$

a. Giải hệ trên khi m = $-\dfrac{1}{4}$

b. Xác định m để hệ có nghiệm

Bài tập 9: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \cos x.\cos y = b \end{cases}$$

a. Giải hệ khi a =1; b = $\dfrac{3}{4}$

b. Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm

Bài tập 10: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \text{tg}x + \text{tg}y = a \\ \text{tg}(x+y) = b \end{cases}$$

a. Giải hệ khi a = $\sqrt{3}+1$, b = $-(2+\sqrt{3})$

b. Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm.

Bài tập 11: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = 1 \\ \sin^2 x + \sin^2 y = m \end{cases}$$

a. Giải hệ trên khi m = $\dfrac{3}{2}$

b. Xác định m để hệ có nghiệm.

Bài tập 12: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm.

$$\begin{cases} \cos x + m\cos y = 1 \\ \sin x + m\sin y = 1 \end{cases}$$

Bài tập 13: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm.

$$\begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = 1 \\ \cos^2 x + \cos^2 y = m \end{cases}$$

Bài tập 14: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm.

$$\begin{cases} \sin x + \sin 2y = 1 \\ \cos x = m(\sin y + \cos y) \end{cases}$$

Bài tập 15: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm.

$$\begin{cases} \cos x = m\cos^3 y \\ \sin x = m\sin^3 y \end{cases}$$

Bài tập 16: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm.

$$\begin{cases} \sin^2 x + m\text{tg}y = m \\ \text{tg}^2 y + m\sin x = m \end{cases}$$

Bài tập 17: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm.

$$\begin{cases} \text{tg}x + \text{tg}y = m \\ \cos 2x + \cos 2y = 1 \end{cases}$$

Bài tập 18: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm.

$$\begin{cases} x + y = m \\ 4(\sin^2 x + \sin^2 y) = 3 - 4\cos^2(x+y) \end{cases}$$

Bài tập 19: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm.

$$\begin{cases} m\cos 2y = \sin x + \cos x \\ (m+1)\sin 2y = \sin x - \cos x \end{cases}$$

Bài tập 20: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm.

$$\begin{cases} \sin x \sin y = m \\ \text{tg}x = 2\text{tg}y \end{cases}$$

Bài tập 21: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm.

$$\begin{cases} \sin^3 x.\cos x = m\text{tg}y \\ \cos^3 x.\sin x = m\cot gy \end{cases}$$

Bài tập 22: Xác định m để hệ sau có nghiệm và tìm nghiệm đó.

$$\begin{cases} \sin x + \sin 2x = m \\ \cos x + \cos 2x = m \end{cases}$$

Bài tập 23: Xác định m để hệ sau có nghiệm (x,y) mà x±y ≠ kπ

$$\begin{cases} \cos^2 x = m\sin y \\ \cos^2 y = m\sin x \end{cases}$$

DIỄN ĐÀN TOÁN - HÓA CẤP 2,3 ĐỊA CHỈ: 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

Bài tập 24: Xác định m để hệ sau có nghiệm (x,y) thoả mãn $x\in(0;\frac{\pi}{2})$ và $y\in(0;\pi)$

$$\begin{cases}\cos x+\cos y=m-1\\ \cos 2x+\cos 2y=2m^2-2\end{cases}$$

Bài tập 25: Tìm a để hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases}a(|x|+1)=y+\cos x\\ |\sin x|+y^2=1\end{cases}$$

Bài tập 26: Tìm a để hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases}ax^2+a=y+|\cos x|\\ \sin^2 x+y^2=1\end{cases}$$

Bài tập 27: Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất thoả mãn $0<x\le 2\pi$, $0<y\le\pi$.

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\sin x=a\\ \dfrac{y}{x}+\sin y=a\end{cases}$$

Bài tập 28: Giải và biện luận các hệ phương trình:

a. $\begin{cases}\cos x=\cos^2 y\\ \sin x=a\sin y\end{cases}$

b. $\begin{cases}\sin x+\sin y=2\sin\alpha\\ \cos^2 x+\cos^2 y=2\sin^2\alpha\end{cases}$

Bài tập 29: Giải và biện luận các hệ phương trình:

a. $\begin{cases}\cos x=m\cos 2y\\ \cos y=m\cos 2x\end{cases}$

b. $\begin{cases}\sin^2 x+\sin^2 y=a\\ \text{tg}(x+y)\text{tg}(x-y)=a-1\end{cases}$

CHƯƠNG III
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC DẠNG ĐẠI SỐ
CHỦ ĐỀ 1
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

I. PHƯƠNG PHÁP

Theo định nghĩa:

$$|a|=\begin{cases}a & \text{neu } a\ge 0\\ -a & \text{neu } a<0\end{cases}$$

Để giải các bài toán chứa dấu giá trị tuyệt đối ta phải tìm cách khử dấu trị tuyệt đối bằng các phương pháp khác nhau, bao gồm:

Dạng 1: Sử dụng định nghĩa.

Dạng 2: Chia khoảng, ta dựa trên hai nguyên tắc chủ đạo sau:

1. ***Nguyên tắc đại số***: Ta xét dấu các biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối và chia trục số thành những khoảng sao cho trong mỗi khoảng đó các biểu thức dưới dấu trị tuyệt đối chỉ nhận một dấu xác định, do đó có thể bỏ dấu trị tuyệt đối.
2. ***Nguyên tắc lượng giác***: Ta xét phương trình lượng giác trên một chu kỳ tuần hoàn T, rồi thực hiện việc xét dấu các biểu thức lượng giác chứa dấu giá trị tuyệt đối trên một chu kỳ và chia chu kỳ tuần hoàn thành những khoảng sao cho trong mỗi khoảng đó các biểu thức lượng giác dưới dấu trị tuyệt đối chỉ nhận một dấu xác định, do đó có thể bỏ dấu trị tuyệt đối. Với mỗi nghiệm x_0 tìm được ta sẽ kết luận phương trình có họ nghiệm $x=x_0+kT$, $k\in Z$.

Dạng 3: Sử dụng các tính chất giá trị tuyệt đối.

Dạng 4: Đặt ẩn phụ, với lưu ý nếu trong phương trình chứa các biểu thức:

- $|\sin x|$ và $\sin^{2k}x$, ta lựa chọn phép đổi biến $t=|\sin x|$, điều kiện $0\le t\le 1$.
- $|\cos x|$ và $\cos^{2k}x$, ta lựa chọn phép đổi biến $t=|\cos x|$, điều kiện $0\le t\le 1$.
- $|\text{tg}x|$ và $\text{tg}^{2k}x$, ta lựa chọn phép đổi biến $t=|\text{tg}x|$, điều kiện $t\ge 0$.
- $|\text{cotg}x|$ và $\text{cotg}^{2k}x$, ta lựa chọn phép đổi biến $t=|\text{cotg}x|$, điều kiện $t\ge 0$.
- $|\sin x\pm\cos x|$ và $\sin x.\cos x$, ta lựa chọn phép đổi biến $t=|\sin x\pm\cos x|$, điều kiện $0\le t\le\sqrt{2}$.

- |sinx|+|cosx| và sinx.cosx, ta lựa chọn phép đổi biến t=|sinx|+|cosx|, điều kiện $1 \le t \le \sqrt{2}$.
- |tgx+cotgx| và $tg^k x + cotg^k x$, ta lựa chọn phép đổi biến t=|tgx+cotgx|, điều kiện t≥2.
- |tgx-cotgx| và $tg^k x + cotg^k x$, ta lựa chọn phép đổi biến t=|tgx-cotgx|, điều kiện t≥0.

Dạng 5: Tính chất hàm số .
Dạng 6: Điều kiện cần và đủ.
Dạng 7: Đánh giá.

II.VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: (Đề 57): Giải phương trình:

$$3\cos x + 2|\sin x| = k, \text{ với } k=2 \text{ và } k=3.$$

Giải

a. Với k=2

$$2|\sin x| = 2 - 3\cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-3\cos x \ge 0 \\ 4\sin^2 x = (2-3\cos x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \le \dfrac{2}{3} \\ 13\cos^2 x - 12\cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \le 2/3 \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 12/13 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z.$$

Vậy phương trình có 1 họ nghiệm.

b. Với k=3

$$2|\sin x| = 3 - 3\cos x \Leftrightarrow 4\sin^2 x = 9(1-\cos x)^2 \Leftrightarrow 13\cos^2 x - 18\cos x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \dfrac{5}{13} = \cos\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = \pm\alpha + 2k\pi \end{array}\right.,\ k \in Z.$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm.

Chú ý: Nhiều phương trình lượng giác chứa dấu trị tuyệt đối được minh hoạ dưới dạng căn thức bởi chúng ta đều biết $|A| = \sqrt{A^2}$. Chúng ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: (ĐHTM - 2000): Giải phương trình:

$$\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2+2\cos 2x}\ .$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sqrt{3}\sin x.\cos x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{4\cos^2 x} \Leftrightarrow 2(\sqrt{3}\sin x - \cos x)\cos x = 4|\cos x|$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right)\cos x = 4|\cos x| \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos x = |\cos x|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases} \\ \cos x = 0 \\ \begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x > 0 \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \begin{cases} \cos x < 0 \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z.$$

Vậy phương trình có 1 họ nghiệm.

Chú ý: Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ phương pháp chia khoảng.

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$|2\cos x - 1| + |2\sin x - 1| = 2. \qquad (1)$$

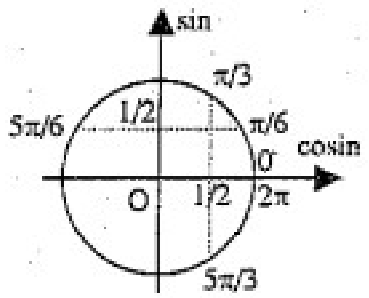
Giải

Nhận xét rằng hàm số lượng giác trong phương trình trên tuần hoàn với chu kỳ 2π, do đó ta tìm nghiệm của phương trình trên đoạn [0, 2π].

Ta có:

$$2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \overset{x\in[0,2\pi]}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} \\ x = \dfrac{5\pi}{3} \end{array}\right..$$

$$2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \overset{x\in[0,2\pi]}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} \end{array}\right..$$



Bảng xét dấu:

x	0		π/6		π/3		5π/6		5π/3		2π
2cosx-1		+		+	0	-		-	0	+	
2sinx-1		-	0	+		+	0	-		-	

Dựa vào bảng xét dấu ta đi xét các trường hợp sau:

a. Nếu $0 \le x \le \frac{\pi}{6} \vee \frac{5\pi}{3} \le x \le 2\pi$ (2)

$$(1) \Leftrightarrow 2\cos x - 1 + 1 - 2\sin x = 2 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right. \overset{x \text{ thoả } (2)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2\pi \end{array}\right..$$

b. Nếu $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{3}$ (3)

$(1) \Leftrightarrow 2\cos x-1+2\sin x-1=2 \Leftrightarrow \cos x+\sin x=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})=2 \Leftrightarrow \cos(x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$, vô nghiệm.

c. Nếu $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5\pi}{6}$ (4)

$(1) \Leftrightarrow 1-2\cos x+2\sin x-1=2 \Leftrightarrow \sin x-\cos x=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=1 \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=\pi+2k\pi \end{array}\right. \overset{x\text{ thoả }(4)}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{2}.$$

d. Nếu $\frac{5\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{3}$ (5)

$(1) \Leftrightarrow 1-2\cos x+1-2\sin x=2 \Leftrightarrow \sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=0$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, không tồn tại nghiệm thoả (5)

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x=2k\pi$ và $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$.

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$|\sin 2x|+|\text{tg}x|=2.$ (1)

Giải

Điều kiện

$\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$.

Cách 1: Nhận xét rằng hàm số lượng giác trong phương trình trên tuần hoàn với chu kỳ π, do đó ta tìm nghiệm của phương trình trên đoạn [0, π].

Ta có:

$$\sin 2x=0 \Leftrightarrow 2x=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2} \overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pi/2 \\ x=\pi \end{array}\right..$$

$$\text{tg}x=0 \Leftrightarrow x=k\pi \overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pi \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu:

x	0		π/2		π
sin2x		+	0	-	
tgx	0	+	‖	-	

Dựa vào bảng xét dấu ta đi xét các trường hợp sau:

a. Nếu $0\le x<\frac{\pi}{2}$ (2)

$(1) \Leftrightarrow \sin 2x+\text{tg}x=2 \Leftrightarrow \text{tg}x-1=1-\sin 2x \Leftrightarrow \frac{\sin x-\cos x}{\cos x}=(\sin x-\cos x)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x-\cos x=0 \\ \frac{1}{\cos x}=\sin x-\cos x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=0 \\ (\sin x-\cos x)\cos x=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x-\frac{\pi}{4})=0 \\ \sin 2x-\cos 2x=3 \text{ vo nghiệm} \end{array}\right. \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=k\pi \overset{x\text{ thoả }(2)}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{4}.$$

b. Nếu $\frac{\pi}{2}<x\le\pi$ (3)

$(1) \Leftrightarrow -\sin 2x-\text{tg}x=2 \Leftrightarrow \text{tg}x+1+1+\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x+\cos x}{\cos x}+(\sin x+\cos x)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x+\cos x=0 \\ \frac{1}{\cos x}+\sin x+\cos x=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=0 \\ (\sin x+\cos x)\cos x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x+\frac{\pi}{4})=0 \\ \sin 2x+\cos 2x=-3 \text{ vo nghiệm} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \overset{x\text{ thoả }(3)}{\Leftrightarrow} x=\frac{3\pi}{4}.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ và $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right|-1=1-|\sin 2x| \Leftrightarrow \frac{|\sin x|-|\cos x|}{|\cos x|}=(|\sin x|-|\cos x|)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |\sin x|-|\cos x|=0 \\ \frac{1}{|\cos x|}=|\sin x|-|\cos x| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |\sin x|=|\cos x| \\ (|\sin x|-|\cos x|)|\cos x|=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 x=\cos^2 x \\ |\sin 2x|-\cos 2x=3 \text{ vo nghiệm} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm

Ví dụ 5: Giải phương trình:

$|2\cos x-1|+|2\sin x-1|=2\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4}).$ (1)

Giải

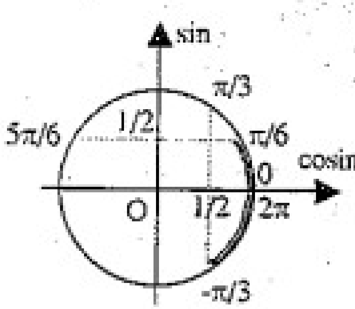
Ta có:

$VP=2\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})=2(\cos x-\sin x)=(2\cos x-1)+(1-2\sin x).$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$|2\cos x-1|+|1-2\sin x|=(2\cos x-1)+(1-2\sin x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos x-1\ge 0\\ 1-2\sin x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\ge \dfrac{1}{2}\\ \sin x\le \dfrac{1}{2}\end{cases}$$



$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}+2k\pi\le x\le \frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z.$$

Ví dụ 6: Giải phương trình:

$$|\cos 2x|+|\sin x|=1.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$|1-2\sin^2 x|+|\sin x|=1.$$

Đặt $|\sin x|=t$, điều kiện $0\le t\le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$|1-2t^2|+t=1 \Leftrightarrow |1-2t^2|=1-t \Leftrightarrow (1-2t^2)^2=(1-t)^2 \Leftrightarrow 4t^4-5t^2+2t=0$$

$$\Leftrightarrow t(4t^3-5t+2)=0 \Leftrightarrow t(2t-1)(2t^2-t-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\\ t=\dfrac{1}{2}\\ t=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}\ \text{loại}\end{array}\right.$$

- Với t=0, ta được:

  $$|\sin x|=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in Z.$$

- Với $t=\frac{1}{2}$, ta được:

  $$|\sin x|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}$$

  $$\Leftrightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 7: Giải phương trình:

$$tg^2x=\frac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|}.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x\ne 0\\ \sin|x|\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow \cos x\ne 0 \Leftrightarrow x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}=\frac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|}.$$

Đặt $t=|x|$, điều kiện $t\ge 0$, khi đó phương trình có dạng:

$$\frac{1-\cos^2 t}{1-\sin^2 t}=\frac{1-\cos t}{1-\sin t} \Leftrightarrow \frac{1-\cos t}{1-\sin t}\left(\frac{1+\cos t}{1+\sin t}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos t)(\cos t-\sin t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-\cos t=0\\ \sin t=\cos t\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t=1\\ tgt=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2k\pi\\ t=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x|=2k\pi\\ |x|=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm 2k\pi\\ x=\pm(\dfrac{\pi}{4}+k\pi)\end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 8: Cho phương trình:

$$|\sin x-\cos x|+4\sin 2x=m. \qquad (1)$$

a. (ĐHTL-94/Đề 51): Giải phương trình với m=1.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Đặt $|\sin x-\cos x|=t$, điều kiện $0\le t\le\sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t+4(1-t^2)=m \Leftrightarrow 4t^2-t-4+m=0. \qquad (2)$$

a. Với m=1, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 4t^2-t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-3/4\ (l)\end{array}\right. \Leftrightarrow |\sin x-\cos x|=1$$

$$\Leftrightarrow (|\sin x-\cos x|)^2=1 \Leftrightarrow |\sin 2x|=0 \Leftrightarrow \sin 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in Z.$$

Vậy với m=1 phương trình có một họ nghiệm.

b. Phương trình (1) có nghiệm ⇔ (2) có nghiệm thuộc $[0,\ \sqrt{2}]$

Cách 1: (2) có nghiệm thuộc $[0,\ \sqrt{2}]$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2)\ \text{có 1 nghiệm thuộc}\ [0,\sqrt{2}]\\ (2)\ \text{có 2 nghiệm thuộc}\ [0,\sqrt{2}]\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(0).f(\sqrt{2})\le 0\\ \begin{cases}\Delta'\ge 0\\ af(0)\ge 0\\ af(\sqrt{2})\ge 0\\ 0\le\dfrac{S}{2}\le\sqrt{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(m-4)(m-\sqrt{2}+4)\le 0\\ \begin{cases}65-16m\ge 0\\ m-4\ge 0\\ m-\sqrt{2}+4\ge 0\\ 0\le\dfrac{1}{8}\le\sqrt{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{2}-4\le -m\le\frac{65}{16}.$$

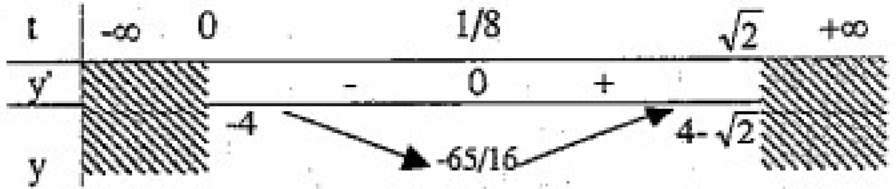
Cách 2: (2) có nghiệm thuộc $[0, \sqrt{2}]$ $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y=-m$ cắt phần đồ thị hàm số $y=4t^2-t-4$ trên phần $[0, \sqrt{2}]$.

Xét hàm số $y=4t^2-t-4$ trên $[0, \sqrt{2}]$.

Đạo hàm

$$y'=8t-1,\ y'=0 \Leftrightarrow 8t-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{8}.$$

Bảng biến thiên

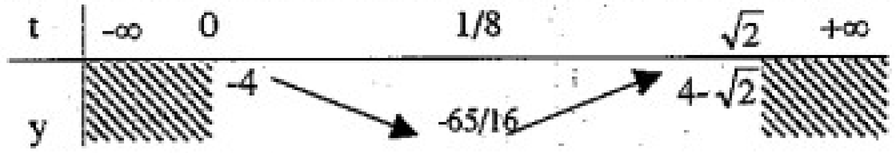


Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là:

$$-\frac{65}{16} \le -m \le 4-\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}-4 \le -m \le \frac{65}{16}.$$

Vậy, với $\sqrt{2}-4 \le -m \le \frac{65}{16}$ phương trình có nghiệm.

Chú ý: Với các em học sinh lớp 11 khi chưa biết khái niệm đạo hàm cũng có thể tạo được bảng biến thiên dựa trên tính chất của hàm số bậc hai.



Ví dụ 9: Tìm m để phương trình:

$$|\sin x-m|+|\cos x-m|=\sqrt{2}. \qquad (1)$$

có đúng một nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$.

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm là $x=x_0$ suy ra

$$|\sin x_0-m|+|\cos x_0-m|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |\cos(\frac{\pi}{2}-x_0)-m|+|\sin(\frac{\pi}{2}-x_0)-m|=\sqrt{2}$$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}-x_0$ cũng là nghiệm của (1).

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi $x_0=\frac{\pi}{2}-x_0 \Leftrightarrow x_0=\frac{\pi}{4}$.

Thay $x_0=\frac{\pi}{4}$ vào (1), ta được:

$$|\sin\frac{\pi}{4}-m|+|\cos\frac{\pi}{4}-m|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |\frac{\sqrt{2}}{2}-m|+|\frac{\sqrt{2}}{2}-m|=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có đúng 1 nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$.

Điều kiện đủ

- Với m=0

$$(1) \Leftrightarrow |\sin x|+|\cos x|=\sqrt{2} \overset{x\in(0,\frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow} \sin x+\cos x=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=1 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \overset{x\in(0,\frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$$ là nghiệm duy nhất.

- Với $m=\sqrt{2}$

$$(1) \Leftrightarrow |\sin x-\sqrt{2}|+|\cos x-\sqrt{2}|=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin x+\cos x=\sqrt{2}$$

giải tương tự như trên.

Vậy với m=0 hoặc $m=\sqrt{2}$ phương trình có đúng 1 nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$.

Ví dụ 10: (Đề 80): Giải phương trình:

$$\cos^4x-\sin^4x=|\cos x|+|\sin x|. \qquad (1)$$

Giải

Ta có nhận xét:

$$VT=\cos^4x-\sin^4x=\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x\le 1,$$

$$\begin{cases} |\cos x|\ge\cos^2 x \\ |\sin x|\ge\sin^2 x \end{cases} \Rightarrow VP=|\cos x|+|\sin x|\ge\cos^2x+\sin^2x=1$$

do đó

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} VT=1 \\ VP=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x=1 \\ |\cos x|=\cos^2 x \\ |\sin x|=\sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

a. $3|\sin x-\cos x|+2\sin 2x=0$.

b. $3|\sin x+\cos x|-4\sin x\cos x=0$.

c. $|\sin x+\cos x|+\sin x\cos x=1$.

d. $|\cos x+2\sin 2x-\cos 3x|=2\sin^2x+2\sin x$.

Bài tập 2. Giải các phương trình sau:

a. $|\sin 2x|+|\sin x|=1+\cos x$.

b. $|\sin 2x|+|\cos x|=1+\sin x$.

c. $|\sin 2x|+|\cot g x|=2$.

d. $|\sin x+\cos x|+|\sin x|=1$.

e. $|\sin x+\cos x|+|\cos x|=1$.

f. $|\sin x+\cos x|+|\sin x-\cos x|=2$.

Bài tập 3. Giải các phương trình sau:

a. $tg^2x=\frac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|}$.

b. $2\cos x-|\sin x|=1$.

c. $|\sin x|+\cos 3x=0$.

d. $|\cot g x|=tg x+\frac{1}{\sin x}$.

Bài tập 4. Giải các phương trình sau:

a. $\left|\frac{tgx}{tgx-1}\right|+|tgx|=\frac{tg^2x}{|tgx-1|}$.

b. $e^{|8\sin x-5|}-e^{|4\sin x-1|}=\frac{1}{|8\sin x-5|}-\frac{1}{|4\sin x-1|}$.

Bài tập 5. Giải các phương trình sau:

a (ĐHL 2000): $\frac{\sqrt{1-\sin 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}}{\sin x}=4\cos x$.

b (ĐHNN I - 95): $\sqrt{2+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x}=\sin x+\sqrt{3}\cos x$.

Bài tập 6. Giải phương trình:

$$|4\cos^2x-1|+2|2\sin^2x-1|=1.$$

Bài tập 7. Cho phương trình

$$|\sin x+\cos x|-4\sin 2x=m.$$

a. Giải phương trình với m=1.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 8. Cho phương trình:

$$\sqrt{2}\,|\sin x+\cos x|=m(tgx+\cot gx).$$

a. Giải phương trình với m=1.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 9. Tìm m để phương trình:

$$|tgx-m|+|\cot gx-m|=2$$

có nghiệm duy nhất thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$.

Bài tập 10. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$:

$$|\sin x+m|+|\cos x+1|=\sqrt{2}$$

Bài tập 11. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$

$$|\sin x+tgx-m|+|\cos x+\cot gx-m|=\sqrt{2}$$

Bài tập 12. Tìm a, b để phương trình:

$$|2\sin x-1|+|2\sin x-a|=b$$

có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc $[0, 2\pi)$.

Bài tập 13. (ĐHL-94): Giải phương trình:

$$\frac{1}{|\cos x|}+\frac{1}{|\sin x|}=a.$$

a. Giải phương trình khi $a=2\sqrt{2}$.

b. Chứng tỏ rằng nếu $a<2\sqrt{2}$ thì phương trình vô nghiệm.

Bài tập 14. (ĐHGT 98): Giải phương trình:

$$6-4x-x^2=\frac{5}{\left|\sin\frac{y}{x}.\cos\frac{y}{x}\right|}.$$

CHỦ ĐỀ 2

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA CĂN

I. PHƯƠNG PHÁP

Để giải các bài toán chứa căn thức ta phải tìm cách khử căn thức bằng các phương pháp khác nhau, bao gồm:

Dạng 1: Biến đổi tương đương, ở đây đối với các phương trình lượng giác chứa căn ta thường không đi giải bất phương trình điều kiện mà giải phương trình nhận được sau phép biến đổi tương đương và sau đó kiểm nghiệm lại nghiệm x cho điều kiện bất phương trình.

Dạng 2: Đặt ẩn phụ.

Dạng 3: Tính chất hàm số.

Dạng 4: Điều kiện cần và đủ.

Dạng 5: Đánh giá.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: (ĐHHH-96). Giải phương trình :

$$\sqrt{5-3\sin^2x-4\cos x}=1-2\cos x.$$

Giải

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases}\cos x\le 1/2 & (1)\\ 5-3(1-\cos^2x)-4\cos x=(1-2\cos x)^2 & (2)\end{cases}$$

Giải (2)

$$\cos^2x=1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x=\pi+2k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Chú ý. Trong ví dụ trên việc giải (2) cho phép ta kiểm tra được điều kiện (1).

Ví dụ 2: (ĐHAN/Khối C-97). Giải phương trình :

$$\sqrt{1+\sin x}+\cos x=0.$$

Giải

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$\sqrt{1+\sin x}=-\cos x \Leftrightarrow \begin{cases}-\cos x\ge 0\\ 1+\sin x=\cos^2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\le 0 & (1)\\ \sin^2x+\sin x=0 & (2)\end{cases}$$

Giải (2)

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2x=1\\ \sin x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\ (1)\\ \cos x=-1\\ \sin x=-1\end{array}\right. \overset{\text{đkiện}(1)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}x=\pi+2k\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{array}\right., k\in Z$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Chú ý. Trong bài toán trên ta đã sử dụng biến đổi $\sin x=0 \Leftrightarrow \cos x=\pm 1$ để dễ dàng kiểm tra cho điều kiện (1).

DIỄN ĐÀN TOÁN - LÝ - HÓA CẤP 2+3 ĐỊA CHỈ: 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

Ví dụ 3: (ĐHSP II-97). Giải phương trình :

$$\sqrt{5\cos x-\cos 2x}+2\sin x=0.$$

Giải

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$\sqrt{5\cos x-\cos 2x}=-2\sin x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2\sin x\ge 0\\5\cos x-\cos 2x=4\sin^2 x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\le 0 & (1)\\5\cos x-(2\cos^2 x-1)=4(1-\cos^2 x) & (2)\end{cases}$$

Giải (2): Ta được:

$$2\cos^2x+5\cos x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-3\ (l)\\\cos x=1/2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z.$$

Kiểm tra điều kiện (1):

- Với $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, ta được:

$$\sin x=\sin(\frac{\pi}{3}+2k\pi)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}>0 \text{ không thoả (1)}$$

do đó nghiệm này bị loại.

- Với $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, ta được:

$$\sin x=\sin(-\frac{\pi}{3}+2k\pi)=\sin(-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0 \text{ thoả (1)}$$

do đó nghiệm này chấp nhận được.

Vậy phương trình có một họ nghiệm $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z$

Chú ý:

1. Trong bài toán trên ta đi kiểm tra từng họ nghiệm của (2) cho điều kiện (1), tuy nhiên có thể sử dụng nhận xét rằng:

   $$\sin x\le 0\Leftrightarrow x\in P(III)\vee x\in P(IV) \text{ để loại họ nghiệm } x=\frac{\pi}{3}+2k\pi.$$

2. Với một vài bài toán cần thực hiện phép rút gọn trước khi khử căn.

Ví dụ 4: (ĐHY/TPHCM-96). Giải phương trình :

$$(1+tgx)\cos^3x+(1+cotgx)\sin^3x=\sqrt{2\sin 2x}.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x\ne 0\\\sin x\ne 0\\\sin 2x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x>0. \qquad (1)$$

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$(\cos x+\sin x)\cos^2x+(\sin x+\cos x)\sin^2x=\sqrt{2\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \cos x+\sin x=\sqrt{2\sin 2x}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x+\cos x\ge 0 & (2)\\(\sin x+\cos x)^2=2\sin 2x & (3)\end{cases}$$

Giải (3)

$$\sin 2x=1 \text{ (thoả mãn (1))}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$$

Kiểm tra điều kiện (2):

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2}+k\pi)=\sqrt{2}\cos(k\pi)$$

$$=\begin{cases}\sqrt{2} \text{ khi } k=2l\\-\sqrt{2} \text{ khi } k=2l+1\end{cases}$$

do vậy nghiệm là $x=\frac{\pi}{4}+2l\pi,\ l\in Z$.

Kết luận phương trình có một họ nghiệm.

Chú ý:

1. Trong bài toán trên để kiểm tra điều kiện ta chia hai trường hợp k chẵn và lẻ bởi hàm số cosx tuần hoàn với chu kỳ 2π. Ta có tổng kết:

   a. $\sin(\alpha+k\pi)=\begin{cases}\sin\alpha & \text{khi } k=2l\\-\sin\alpha & \text{khi } k=2l+1\end{cases}\quad l\in Z.$

   b. $\cos(\alpha+k\pi)=\begin{cases}\cos\alpha & \text{khi } k=2l\\-\cos\alpha & \text{khi } k=2l+1\end{cases}\quad l\in Z.$

2. Nếu nghiệm tìm được từ việc giải phương trình bị ***lẻ*** đối với phép kiểm tra điều kiện bất phương trình thì tốt nhất ta nên giải bất phương trình điều kiện rồi biểu diễn kết quả hệ trên đường tròn đơn vị để nhận được nghiệm cho phương trình, cụ thể ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 5: (Đề 108): Giải phương trình :

$$\frac{\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}}{\cos x}=4\sin x$$

Giải

Điều kiện

$$\cos x\ne 0\Leftrightarrow x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}+\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}=2\sin 2x\Leftrightarrow\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\left|\sin\frac{x}{2}\right|=\sqrt{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2x\ge 0\\(\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\left|\sin\frac{x}{2}\right|)^2=2\sin^2 2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2x\ge 0\\1+|\sin x|=1-\cos 4x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2x\ge 0\\|\sin x|=-\cos 4x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2x\ge 0\\-\cos 4x\ge 0\\\sin^2 x=\cos^2 4x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2x\ge 0\\|\sin 2x|\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\\1-\cos 2x=1+\cos 8x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 8x = \cos(\pi - 2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \le 2x \le \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \left[\begin{array}{l} 8x = \pi - 2x + 2k\pi \\ 8x = -\pi + 2x + 2k\pi \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{8} + k\pi \le x \le \dfrac{3\pi}{8} + k\pi \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k\pi}{5} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{10} + l\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + l\pi \end{array}\right., l \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 6: (ĐHSP Qui Nhơn - 98): Giải phương trình :

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{\sin x + \sqrt{3}\cos x} = 2.$$

Giải

Đặt $t = \sqrt{\sin x + \sqrt{3}\cos x}$.

Ta có:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 0 \le t \le 2.$$

Phương trình có dạng:

$$t^2 + t = 2 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{\sin x + \sqrt{3}\cos x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \Leftrightarrow 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 7: (HVKTQS - 2000): Cho phương trình :

$$\cos 2x = m\sqrt{1 + \text{tg}x}\,.\cos^2 x. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=1.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[0, \frac{\pi}{3}]$.

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \ne 0 \\ \text{tg}x \ge -1 \end{cases} \qquad (*)$$

Đặt t=tgx thì $\cos 2x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ & $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + t^2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$\frac{1 - t^2}{1 + t^2} = m.\sqrt{1 + t}\,.\,\frac{1}{1 + t^2} \Leftrightarrow 1 - t^2 = m.\sqrt{1 + t}\,. \qquad (2)$$

a. Với m=1, ta được:

$$1 - t^2 = \sqrt{1 + t} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - t^2 \ge 0 \\ (1 - t^2)^2 = 1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t| \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} 1 + t = 0 \\ (1 - t)^2(1 + t) = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t| \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} 1 + t = 0 \\ t^3 - t^2 - t = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |t| \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} 1 + t = 0 \\ (t^2 - t - 1)t = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t| \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 0 \\ t = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 0 \\ t = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}x = -1 \\ \text{tg}x = 0 \\ \text{tg}x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} = \text{tg}\alpha \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy với m=1, phương trình có ba họ nghiệm.

b. Vì $x \in [0, \frac{\pi}{3}] \Rightarrow t \in [0, \sqrt{3}]$.

Do 1+t>0 nên phương trình được viết lại dưới dạng:

$$(1 - t)\sqrt{1 + t} = m. \qquad (3)$$

Để phương trình (1) có nghiệm $x \in [0, \frac{\pi}{3}] \Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $t \in [0, \sqrt{3}]$

⇔ đường thẳng y=m cắt phần đồ thị hàm số $y = (1 - t)\sqrt{1 + t}$ trên đoạn $[0, \sqrt{3}]$

Xét hàm số $y = (1 - t)\sqrt{1 + t}$ trên $D = [0, \sqrt{3}]$

Đạo hàm

$$y' = -\sqrt{1 + t} + \frac{1 - t}{2\sqrt{1 + t}} = \frac{-2(1 + t) + 1 - t}{2\sqrt{1 + t}} = \frac{-3t - 1}{2\sqrt{1 + t}} < 0, \forall t \in D$$

⇒ hàm số luôn nghịch biến

Do đó điều kiện là:

$$f(\sqrt{3}) \le m \le f(0) \Leftrightarrow (1 - \sqrt{3})\sqrt{1 + \sqrt{3}} \le m \le 1.$$

Vậy với $(1 - \sqrt{3})\sqrt{1 + \sqrt{3}} \le m \le 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 8: Giải phương trình :

$$\sqrt{\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x}+\sqrt{\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x}=2.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases}\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\ge 0\\ \frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{\cos x}\ge\frac{\sin x}{\cos x}\\ \frac{1}{\cos x}\ge-\frac{\sin x}{\cos x}\end{cases}\Leftrightarrow \cos x>0. \qquad (1)$$

Nhận xét rằng:

$$\sqrt{\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x}\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2x}=1,$$

do đó nếu đặt $t=\sqrt{\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x}$, t>0, suy ra $\sqrt{\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x}=\frac{1}{t}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t+\frac{1}{t}=2\Leftrightarrow t^2-2t+1=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x}=1\\ \sqrt{\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x=1\\ \frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x=1\end{cases}$$

$$\overset{+}{\Rightarrow}\ \frac{1}{\cos x}=1\Leftrightarrow \cos x=1\Leftrightarrow x=2k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm $x=2k\pi,\ k\in Z$.

Ví dụ 9: Giải phương trình :

$$\sqrt[3]{2-\operatorname{tg}x}+\sqrt{\operatorname{tg}x-1}=1. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x\ne 0\\ \operatorname{tg}x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \operatorname{tg}x\ge 1. \qquad (*)$$

Đặt

$$\begin{cases}u=\sqrt[3]{2-\operatorname{tg}x}\\ v=\sqrt{\operatorname{tg}x-1}\end{cases},\ v\ge 0,\ \text{suy ra } u^3+v^2=1.$$

Khi đó phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases}u^3+v^2=1\\ u+v=1\end{cases}\Rightarrow u^3+(1-u)^2=1\Leftrightarrow u^3+u^2-2u=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\ u=1\\ u=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{2-\operatorname{tg}x}=0\\ \sqrt[3]{2-\operatorname{tg}x}=1\\ \sqrt[3]{2-\operatorname{tg}x}=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=2=\operatorname{tg}\alpha\\ \operatorname{tg}x=1\\ \operatorname{tg}x=10=\operatorname{tg}\beta\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha+k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\beta+k\pi\end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 10: Giải phương trình:

$$\sqrt{3+\sin x}-\sqrt{2-\sin x}=1$$

Giải

Đặt t=sinx, điều kiện $|t|\le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$\sqrt{3+t}=1+\sqrt{2-t}. \qquad (2)$$

Nhận xét rằng

Hàm số $f=\sqrt{3+t}$.

- Hàm số $f=\sqrt{3+t}$ đồng biến trên D=[-1, 1].
- Hàm số $g=1+\sqrt{2-t}$ nghịch biến trên D=[-1, 1].

Do đó phương trình (2) có dạng:

f(t)=g(t)

nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Thấy t=1 thoả mãn phương trình, do đó:

$$\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 11: Giải phương trình:

$$\sqrt{2\operatorname{tg}x-1}+\sqrt{\operatorname{tg}^2x-1}=1. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x\ne 0\\ 2\operatorname{tg}x-1\ge 0\\ \operatorname{tg}^2x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \operatorname{tg}x\ge\frac{1}{2}. \qquad (*)$$

Đặt t=tgx, điều kiện $t\ge\frac{1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$\sqrt{2t-1}+\sqrt{t^2-1}=1. \qquad (2)$$

Nhận xét rằng số nghiệm của phương trình (2) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{2t-1}+\sqrt{t^2-1}$ và đường thẳng y=1.

Xét hàm số $y=\sqrt{2t-1}+\sqrt{t^2-1}$ trên miền $D=[\frac{1}{2},+\infty)$.

- Đạo hàm:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{2t-1}}+\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}>0,\ \forall t\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow \text{hàm số luôn đồng biến.}$$

Do đó, phương trình nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Thấy t=1 thoả mãn phương trình, do đó:

$$t=1 \Leftrightarrow tgx=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 12: Tìm nghiệm $x\in[-\frac{\pi}{2}, 0]$ của phương trình:

$$\sin^3x+1=2\sqrt[3]{2\sin x-1}. \qquad (1)$$

Giải

Đặt t=sinx, điều kiện $-1\le t\le 0$. (*)

Khi đó phương trình có dạng:

$$\frac{t^3+1}{2}=\sqrt[3]{2t-1}. \qquad (2)$$

Xét hàm số $y=\frac{t^3+1}{2}$ là hàm đồng biến trên {-1, 1} do đó nó có hàm số ngược.

Xét phương trình ẩn t:

$$y=\frac{t^3+1}{2} \Leftrightarrow 2y=t^3+1 \Leftrightarrow t^3=2y-1 \Leftrightarrow t=\sqrt[3]{2y-1}.$$

Vậy hàm số ngược của hàm số $y=\frac{t^3+1}{2}$ là $y=\sqrt[3]{2t-1}$, do đó:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{t^3+1}{2}=t \Leftrightarrow t^3-2t+1=0. \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\ \text{loại do (*)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 13: Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$$\sqrt{m-\cos x}=\cos 2x. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm là $x=x_0$, tức là:

$$\sqrt{m-\cos x_0}=\cos 2x_0 \Leftrightarrow \sqrt{m-\cos(-x_0)}=\cos 2(-x_0)$$

$\Rightarrow -x_0$ cũng là nghiệm của (1).

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi

$$x_0=-x_0 \Leftrightarrow x_0=0.$$

Thay $x_0=0$ vào (1), ta được:

$$\sqrt{m-\cos 0}=\cos 0 \Leftrightarrow \sqrt{m-1}=1 \Leftrightarrow m=2.$$

Đó chính là điều kiện cần để (1) có nghiệm duy nhất thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Điều kiện đủ

Với m=2, khi đó (1) có dạng:

$$\sqrt{2-\cos x}=\cos 2x \qquad (2)$$

Ta có nhận xét:

$$\begin{cases} VT=\sqrt{2-\cos x}\ge 1 \\ VP=\cos 2x\le 1 \end{cases}$$

Do đó:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} VT=1 \\ VP=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x=1 \\ 2\cos^2 x-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x=1 \overset{x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow} x=0$$

là nghiệm duy nhất của phương trình.

Vậy với m=2 phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 14: Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$:

$$\sqrt{tgx-m}+\sqrt{\cot gx-m}=2. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm là $x=x_0$, tức là:

$$\sqrt{tgx_0-m}+\sqrt{\cot gx_0-m}=2 \Leftrightarrow \sqrt{\cot g(\frac{\pi}{2}-x_0)-m}+\sqrt{tg(\frac{\pi}{2}-x_0)-m}=2$$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}-x_0$ cũng là nghiệm của (1).

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi

$$x_0=\frac{\pi}{2}-x_0 \Leftrightarrow x_0=\frac{\pi}{4}.$$

Thay $x_0=\frac{\pi}{4}$ vào (1), ta được:

$$\sqrt{tg\frac{\pi}{4}-m}+\sqrt{\cot g\frac{\pi}{4}-m}=2 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-m}=2 \Leftrightarrow m=0.$$

Đó chính là điều kiện cần để (1) có nghiệm duy nhất thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$.

Điều kiện đủ: Với m=0, khi đó (1) có dạng:

$$\sqrt{tgx}+\sqrt{\cot gx}=2 \qquad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$VT=\sqrt{tgx}+\sqrt{\cot gx}\ge 2\sqrt{\sqrt{tgx}.\sqrt{\cot gx}}=2$$

Do đó:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{tgx}=\sqrt{\cot gx}=1 \Leftrightarrow tgx=1 \overset{x\in(0,\frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{4}$$

là nghiệm duy nhất của phương trình.

Vậy, với m=0 phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 15: (Đề 107). Giải phương trình:

$$\sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + 2} = 2\sin x - 1.$$

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} VT = \sqrt{(\sin x - 1)^2 + 1} \ge 1 \\ VP = 2\sin x - 1 \le 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} VT = 1 \\ VP = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 1 = 0 \\ 2\sin x - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 16: (Đề 24). Giải phương trình:

$$\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2(1 + \sin^2 2x).$$

Giải

Ta có:

$$(\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x})^2 \le 4 \Rightarrow \cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} \le 2$$

và $2(1+\sin^2 2x) \ge 2$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cos 3x = \sqrt{2 - \cos^2 3x} \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x \ge 0 \\ \cos^2 3x = 2 - \cos^2 3x \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2k\pi$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Chú ý: Việc khai căn sẽ tạo ra phương trình lượng giác chứa dấu trị tuyệt đối và chúng ta đã biết cách sử dụng các tính chất trị tuyệt đối để giải phương trình, chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 17: (ĐHL 2000): Giải phương trình :

$$\frac{\sqrt{1 - \sin 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x}}{\sin x} = 4\cos x.$$

Giải

Điều kiện $\sin x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne k\pi,\ k \in Z.$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{(\sin x - \cos x)^2} + \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = 2\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow |\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x| = (\sin x - \cos x) + (\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x \ge 0 \\ \sin x + \cos x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) \ge 0 \\ \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x - \frac{\pi}{4}) \ge 0 \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k\pi \le x - \frac{\pi}{4} \le \pi + 2k\pi \\ 2k\pi \le x + \frac{\pi}{4} \le \pi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z.$

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình:

a. (ĐHKTQD 2000): $\sqrt{1 + 8\cos^2 2x.\sin 2x} = 2\sin(3x + \frac{\pi}{4})$.

b. (ĐHKTQD 2001): $\sqrt{3 + 4\sqrt{6} - (16\sqrt{3} - 8\sqrt{2})\cos x} = 4\cos x - \sqrt{3}$.

c. (Đề 25): $2\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{1 + 8\sin 2x\cos^2 2x}$.

d. (ĐHQG/TPHCM-99): $3\sqrt{1 + tgx}(\sin x + 2\cos x) = 5(\sin x + 3\cos x)$

Bài tập 2. Giải các phương trình:

a. $\sqrt{3\cos x + 4} - \sqrt{2\cos x + 1} = \sqrt{\cos x + 3}$.

b. (ĐHBK/ĐHL-97): $(\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{\cos x})\cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x$.

c. (ĐHNN-98): $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x} = 2\sqrt{\sin x - \cos x}$.

d. $\sqrt{\frac{1}{\sin x} - \cot gx} + \sqrt{\frac{1}{\sin x} + \cot gx} = 2$.

Bài tập 3. Giải các phương trình:

a. $\sqrt{7 - 2\cos 2x - 4\sin x} + \sqrt{2\sin x - 1} = 2$

b. (ĐHTM - 2000): $\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2\cos 2x}$.

c. (HVKTQS-94): $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = 2\sqrt{\sin x + \cos x}$.

d. (ĐHNN I - 95): $\sqrt{2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x} = \sin x + \sqrt{3}\cos x$.

Bài tập 4. Giải các phương trình:

a. $\frac{\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x}}{\sin x} = 4\cos x$

b. $\frac{\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x}}{\cos x} = 4\sin x$

c. (ĐHXD-95): $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} = 2\cos 2x$.

d. (ĐHD-98): $\frac{\cos\frac{4x}{3} - \cos^2 x}{\sqrt{1 - tg^2 x}} = 0$.

Bài tập 5. Giải các phương trình:

a. $\sin^3x(1+\text{cotg}x) + \cos^3(1+\text{tg}x) = 2\sqrt{\sin x.\cos x}$

b. $\sqrt{\cos 2x - \sin 4x} = \sin x - \cos x$

Bài tập 6. Giải các phương trình:

a. $\cos 3x + \sqrt{2-\cos^2 3x} = 2(1+2\sin^2 2x)$

b. $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1-\text{cox}2x}} = \sin 2x + \cos 2x$

Bài tập 7. Giải các phương trình:

a. (Đề 119): $\cos x.\sqrt{\dfrac{1}{\cos x}-1} + \cos 3x.\sqrt{\dfrac{1}{\cos 3x}-1} = 1.$

b. $\sin^3x(1+\text{cotg}x) + \cos^3x(1+\text{tg}x) = 2\sqrt{\sin x.\cos x}$.

c. $\sin x + \sqrt{2-\sin^2 x} + \sin x\sqrt{2-\sin^2 x} = 3$

Bài tập 8. Tìm các nghiệm của phương trình:

$$\sqrt{\text{tg}x+\sin x} + \sqrt{\text{tg}x-\sin x} = \sqrt{3\text{tg}x}$$

a. Trên $[0,\pi]$

b. Trên toàn trục số

Bài tập 9. Với giá trị nào của m thì phương trình sau đây có nghiệm:

$$\sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{1+2\sin x} = m$$

Bài tập 10. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$3\cos^6 2x+\sin^4 2x+\cos 4x-m=2\sqrt{1+3\cos^2 2x}.\cos^2 2x.$$

Bài tập 11. Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$:

$$\sqrt{\text{tg}x-m} + \sqrt{\text{cotg}x-m} = 1.$$

Bài tập 12. Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $(-\pi , \pi)$:

$$\sqrt{m-\cos 2x} = \cos x.$$

Bài tập 13. Cho phương trình:

$$\sin x + \cos x = m\sqrt{1+\sin x.\cos x}.$$

a. Xác định m để phương trình có nghiệm.

b. Giải phương trình với $m = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Bài tập 14. Cho phương trình:

$$\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x} = k\sin x.$$

a. Giải phương trình với k=2.

b. Giải và biện luận phương trình trong trường hợp tổng quát.

Bài tập 15. (HVKTQS-96/Đề 37). Cho phương trình:

$$\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x} = k\cos x.$$

a. Giải phương trình với k=2.

b. Giải và biện luận phương trình trong trường hợp tổng quát.

Bài tập 16. (Đề 66). Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{1+2\sin x} + \sqrt{1+2\cos x} = m.$$

CHỦ ĐỀ 3
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA HÀM SỐ MŨ

I. PHƯƠNG PHÁP

Để giải các bài toán chứa hàm số mũ ta sử dụng một trong các phương pháp được trình bày theo các dạng:

Dạng 1: Biến đổi tương đương.
Dạng 2: Đặt ẩn phụ.
Dạng 3: Tính chất hàm số.
Dạng 4: Điều kiện cần và đủ.
Dạng 5: Đánh giá

II.VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$(\text{tg}x)^{x^2+x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Giải

Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$(\text{tg}x)^{x^2+x} = \text{tg}^2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}x = 1 \\ \begin{cases} 0 < \text{tg}x \neq 1 \\ x^2+x=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4}+k\pi \\ \begin{cases} 0 < \text{tg}x \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4}+k\pi \\ x = 1 \end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$(2+x-x^2)^{\sin x} = (2+x-x^2)^{2-\sqrt{3}\cos x}.$$

Giải

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} 2+x-x^2 > 0 \\ (2+x-x^2-1)(\sin x - 2 + \sqrt{3}\cos x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2 & (*) \\ \left[\begin{array}{ll} x^2-x-1=0 & (1) \\ \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 & (2) \end{array}\right. \end{cases}$$

- Giải (1) ta đợc $x_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ thoả mãn điều kiện (*).
- Giải (2):

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{3}) = 1 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z.$$

Để nghiệm trên thoả mãn điều kiện (*) ta phải có:

$$-1<\frac{\pi}{6}+2k\pi<2 \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}(-1-\frac{\pi}{6})<k<\frac{1}{2\pi}(2-\frac{\pi}{6}) \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k=0 \Rightarrow x_3=\frac{\pi}{6}.$$

Vậy phương trình có ba nghiệm phân biệt $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_3=\frac{\pi}{6}$.

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$16^{\sin^2 x}+16^{\cos^2 x}=10.$$

Giải

Cách 1: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$16^{\sin^2 x}+16^{1-\sin^2 x}=10 \Leftrightarrow 16^{\sin^2 x}+\frac{16}{16^{\sin^2 x}}=10.$$

Đặt $t=16^{\sin^2 x}$, điều kiện $1\le t\le 16$ vì $0\le \sin^2 x\le 1$ nên $16^0\le 16^{\sin^2 x}\le 16^1$.
Khi đó phương trình có dạng:

$$t+\frac{16}{t}=10 \Leftrightarrow t^2-10t+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=8 \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 16^{\sin^2 x}=8 \\ 16^{\sin^2 x}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{4\sin^2 x}=2^3 \\ 2^{4\sin^2 x}=2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 x=\frac{3}{4} \\ \sin^2 x=\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=-\frac{1}{2} \\ \cos 2x=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos^2 2x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos 4x=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\ ,\ k\in Z.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Đặt:

$$\begin{cases} u=16^{\sin^2 x} \\ v=16^{\cos^2 x} \end{cases},\ 1\le u,v\le 16.$$

Khi đó:

$$u.v=16^{\sin^2 x}.16^{\cos^2 x}=16^{\sin^2 x \cos^2 x}=16.$$

Phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} u+v=10 \\ uv=16 \end{cases}$$

khi đó u, v là nghiệm của phương trình

$$t^2-10t+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2\ \&\ v=8 \\ u=8\ \&\ v=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 16^{\sin^2 x}=2\ \&\ 16^{\cos^2 x}=8 \\ 16^{\sin^2 x}=8\ \&\ 16^{\cos^2 x}=2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 x=\frac{1}{4}\ \&\ \cos^2 x=\frac{3}{4} \\ \sin^2 x=\frac{3}{4}\ \&\ \cos^2 x=\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 x=\frac{1}{4} \\ \sin^2 x=\frac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=\frac{1}{2} \\ \cos 2x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos 4x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\ .\ k\in Z.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 4: (ĐHL - 96): Cho phương trình:

$$(3+2\sqrt{2})^{tgx}+(3-2\sqrt{2})^{tgx}=m.$$

a. Giải phương trình với m=6.

b. Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Giải

Điều kiện

$$\cos x\ne 0 \Leftrightarrow x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Nhận xét rằng:

$$(3+2\sqrt{2})^{tgx}.(3-2\sqrt{2})^{tgx}=1$$

Do đó nếu đặt $t=(3+2\sqrt{2})^{tgx}$, $t>0$ thì $(3-2\sqrt{2})^{tgx}=\frac{1}{t}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t+\frac{1}{t}=m \Leftrightarrow t^2-mt+1=0. \qquad (2)$$

a. Với m=6, ta được:

$$t^2-6t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3+2\sqrt{2} \\ t=3-2\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (3+2\sqrt{2})^{tgx}=3+2\sqrt{2} \\ (3+2\sqrt{2})^{tgx}=(3+2\sqrt{2})^{-1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=1 \\ tgx=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy với m=6 phương trình có hai họ nghiệm $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

⇔ phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ af(0)>0 \\ S/2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4>0 \\ 1>0 \\ m/2>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>2.$$

Vậy với m>2 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

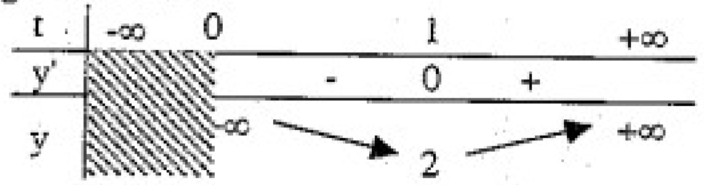
⇔ đường thẳng y=m cắt đồ thị hàm số $y=t+\frac{1}{t}$ trên $(0;+\infty)$ tại 2 điểm phân biệt.

Xét hàm số $y=t+\frac{1}{t}$ trên $D=(0,+\infty)$.

Đạo hàm

$$y'=1-\frac{1}{t^2},\ y'=0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{t^2}=0 \Leftrightarrow t=\pm.$$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là m>2.

Ví dụ 5: Giải phương trình:

$$tgx+2.\,3^{\log_2 tgx}=3. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ tgx > 0\end{cases} \qquad (*)$$

Đặt t=tgx, phương trình có dạng:

$$t+2.\,3^{\log_2 t}=3 \Leftrightarrow 2.\,3^{\log_2 t}=3-t. \qquad (2)$$

- Vế phải của phương trình là một hàm ghịch biến.
- Vế trái của phương trình là một hàm đồng biến.

Do vậy, nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.
Nhận xét rằng t=1 là nghiệm của phương trình (2) vì

$$2.\,3^{\log_2 1}=3-1.$$

Khi đó:

$$tgx=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 6: Giải phương trình:

$$3^{2sinx-3}+(3sinx-10).3^{sinx-2}+3-sinx=0.$$

Giải

Đặt $t=3^{sinx-2}$, điều kiện t>0.
Khi đó phương trình tương đương với:

$$3.t^2+(3sinx-10).t+3-sinx=0$$

$$\Delta=(3sinx-10)^2-4.3.(3-sinx)=(3sinx-8)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{3}\\ t=3-\sin x\end{array}\right.$$

- Với $t=\frac{1}{3}$ ta được

$$3^{sinx-2}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow sinx-2=-1 \Leftrightarrow sinx=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z.$$

- Với t=3-sinx ta được

$$3^{sinx-2}=3-sinx.$$

Ta đoán được nghiệm sinx=2, vì $3^0=3-2$.

Vế trái là một hàm số đồng biến còn vế phải là hàm số nghịch biến, do vậy sinx=2 là nghiệm duy nhất của phương trình này. Nhng phơng trình sinx=2 vô nghiệm.

Vậy, phương trình một họ nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$.

Ví dụ 7: Giải phương trình:

$$3^{cosx}-2^{cosx}=cosx.$$

Giải

Viết lại phương trình dới dạng:

$$3^{cosx}-3cosx=2^{cosx}-2cosx.$$

Giả sử phương trình có nghiệm α, khi đó :

$$3^{cos\alpha}-3cos\alpha=2^{cos\alpha}-2cos\alpha. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^{cos\alpha}-t.cos\alpha$ khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow f(3)=f(2)$$

và f(t) khả vi và liên tục trên [2, 3], do đo theo định lí Lagrange ∃c∈(2, 3) sao cho

$$f'(c)=\frac{F(3)-F(2)}{3-2} \Leftrightarrow [c^{cos\alpha-1}-1]\,cos\alpha=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0\\ \cos\alpha=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \alpha=2k\pi\end{array}\right.$$

Thử lại $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$ và α=2kπ vào (1) thấy đúng.

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ và x=2kπ, k∈Z.

Ví dụ 8: Giải phương trình:

$$2^{x^2}=cos2x.$$

Giải

Ta có $x^2\geq 0 \Leftrightarrow 3^{x^2}\geq 3^0=1\geq cos2x$.
Suy ra phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases}2^{x^2}=1\\ \cos 2x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=0\\ \cos 2x=1\end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x=0.

Ví dụ 9: Giải phương trình:

$$2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3.$$

Giải

Vì $0\leq sin^2x, cos^2x\leq 1$ nên

$$\begin{cases}2^{\sin^2 x}\leq \sin^2 x+1\\ 2^{\cos^2 x}\leq \cos^2 x+1\end{cases} \Rightarrow 2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}\leq 3,$$

dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} \sin^2 x = 0 \vee \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 x = 0 \vee \cos^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm $x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z$.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $(\sin x)^{2(x-1)} = (\sin x)^{(x-1)^2}$.

b. $(3+2x-x^2)^{\sqrt{3}\sin x} = (3+2x-x^2)^{1-\cos x}$.

c. $4^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2 + \sqrt{2}$.

d. $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$.

e. $4^{\cot g^2 x} + 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} - 3 = 0$.

Bài tập 2: (ĐHAN Khối D 99): Giải phương trình

$$9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = 10.$$

Bài tập 3: (ĐHL 98) Giải phương trình

$$(\sqrt{7+4\sqrt{3}})^{\sin x} + (\sqrt{7-4\sqrt{3}})^{\sin x} = 4.$$

Bài tập 4: Giải phương trình:

a. $2^{1-\sin^2 x} = (2+x^2)^{1+x}$.

b. $2003^{\sin x} - 2002^{\sin x} = \sin x$.

c. $(1+\cos x)(2+4^{\cos x}) = 3.\ 4^{\cos x}$.

d. $(1+\sin x)(2+4^{\sin x}) = 3.\ 4^{\sin x}$.

Bài tập 5: Giải phương trình:

a. $2^{\sin x} = \sin x + \frac{1}{\sin x}$.

b. $\frac{1}{2^{\sin^2 x}} - \frac{1}{2^{\sin^2 x.\cos^2 x}} = \sin^4 x$.

Bài tập 6: Giải phương trình:

a. $2\cos^2(x+\sqrt{x}) = 3^{-\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}}$.

b. $tgx + cotgx = 2^{\sin 2x}$.

Bài tập 7: Giải phương trình:

a. $4^{\sin^2 x} + 4^{1+\cos^2 x} = 10$.

b. $2\cos\frac{x}{5} = 2^x + 2^{-x}$.

Bài tập 8: Giải phương trình:

$$3^{|\sin\sqrt{x}|} = |\cos x|.$$

CHỦ ĐỀ 4
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA HÀM SỐ LÔGARIT

I. PHƯƠNG PHÁP

Để giải các bài toán chứa hàm số lôgarit ta sử dụng một trong các phương pháp được trình bày theo các dạng:

Dạng 1: Biến đổi tương đương, còn được gọi là phương pháp mũ hoá đưa về cùng cơ số.

Dạng 2: Đặt ẩn phụ.

Dạng 3: Tính chất hàm số.

Dạng 4: Điều kiện cần và đủ.

Dạng 5: Đánh giá.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải phương trình

$$\log_{\cos x} 4.\log_{\cos^2 x} 2 = 1.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\begin{cases} 0 < \cos x \neq 1 \\ \log_{\cos x} 2.\log_{\cos x} 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \cos x < 1 \\ \left[\begin{array}{l} \log_{\cos x} 2 = 1 \\ \log_{\cos x} 2 = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \cos x < 1 \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 2 \\ \cos x = 1/2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$.

Ví dụ 2: (HVKTQS - 97) : Giải phương trình:

$$\log_{\frac{6x-x^2}{10}}(\sin 3x + \sin x) = \log_{\frac{6x-x^2}{10}} \sin 2x$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\begin{cases} 0 < \frac{6x-x^2}{10} \neq 1 \\ \sin 3x + \sin x = \sin 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 6 \\ \sin 2x > 0 \\ 2\sin 2x.\cos x = \sin 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 6 \\ \sin 2x > 0 \\ \cos x = 1/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 6 \\ \sin 2x > 0 \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{\pi}{3} + 2k\pi < 6 \\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$\log_2\left(\frac{1}{\cos x}-tgx\right).\log_3\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right)=\log_6\left(\frac{1}{\cos x}-tgx\right)$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases}\frac{1}{\cos x}-tgx>0\\ \frac{1}{\cos x}+tgx>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1-\sin x}{\cos x}>0\\ \frac{1+\sin x}{\cos x}>0\end{cases}\Leftrightarrow \cos x>0.$$

Nhận xét rằng:

$$\left(\frac{1}{\cos x}-tgx\right)\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right)=1\Rightarrow\left(\frac{1}{\cos x}-tgx\right)=\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right)^{-1}.$$

Khi đó phương trình được viết lại dưới dạng:

$$\log_2\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right)^{-1}.\log_3\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right)=\log_6\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow\log_2\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right).\log_3\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right)=\log_6\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right).$$

Sử dụng phép đổi cơ số:

$$\log_2\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right)=\log_2 6.\log_6\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right);$$

$$\&\ \log_3\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right)=\log_3 6.\log_6\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right).$$

Khi đó phương trình được viết lại dưới dạng:

$$\log_2 6.\log_6\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right).\log_3 6.\log_6\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right)=\log_6\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right).\quad(1)$$

Đặt $t=\log_6\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right)$.

Khi đó (1) có dạng:

$$t(\log_2 6.\log_3 6.t-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ \log_2 6.\log_3 6.t-1=0\end{array}\right.$$

- Với $t=0$

$$\log_6\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right)=0\Leftrightarrow\frac{1}{\cos x}+tgx=1\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{\cos x}-tgx=1\\ \frac{1}{\cos x}+tgx=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\cos x}=1\Leftrightarrow\cos x=1\Leftrightarrow x=2k\pi,\ k\in Z.$$

- Với $\log_2 6.\log_3 6.t-1=0$

$$\log_2 6.\log_3 6.\log_6\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right)-1=0\Leftrightarrow\log_2 6.\log_3\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right)=\log_6 2\Leftrightarrow\frac{1}{\cos x}+tgx=3^{\log_6 2}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{\cos x}-tgx=3^{\log_6 2}\\ \frac{1}{\cos x}+tgx=3^{-\log_6 2}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}\left(3^{\log_6 2}+3^{-\log_6 2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\cos x=2.\left(3^{\log_6 2}+3^{-\log_6 2}\right)^{-1}=\cos\alpha\Leftrightarrow x=\pm\alpha+2k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm $x=2k\pi$ và $x=\pm\alpha+2k\pi$, $k\in Z$.

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$\log_2(3\sin^2x-2)=3\cos^2x.$$

Giải

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\log_2(3\sin^2x-2)=3(1-\sin^2x).$$

Đặt $t=3\sin^2x$, điều kiện $\frac{2}{3}<t\le 3$, khi đó phương trình có dạng:

$$\log_2(t-2)=3-t$$

- Hàm số $y=\log_2(t-2)$ là hàm đồng biến.
- hàm số $y=3-t$ là hàm nghịch biến.
- Vậy, phương trình nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.
- Nhận xét rằng $t=3$ là nghiệm của phương trình.

Khi đó:

$$3\sin^2x=3\Leftrightarrow\sin^2x=1\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$.

Ví dụ 5: Giải phương trình:

$$2^{\log_3(2\cos x+1)}=2\cos x.$$

Giải

Đặt $t=2\cos x$, điều kiện $|t|\le 2$, khi đó phương trình có dạng:

$$2^{\log_3(t+1)}=t.$$

Điều kiện: $t+1>0\Leftrightarrow t>-1$.

a. Nếu $-1<t\le 0$, thì phương trình vô nghiệm.

b. Xét $t>0$.

Đặt $y=\log_3(t+1)$.

Ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases}y=\log_3(t+1)\\ t=2^y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t+1=3^y\\ t=2^y\end{cases}\Rightarrow 2^y+1=3^y\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^y+\left(\frac{1}{3}\right)^y=1.\qquad(1)$$

Hàm số $Y=\left(\frac{2}{3}\right)^y+\left(\frac{1}{3}\right)^y$ là hàm nghịch biến.

Ta có:

- Với $y=1$, $f(1)=1$ do đó $y=1$ là nghiệm của phương trình (1).
- Với $y>1$, $f(y)<f(1)=1$ do đó phương trình (1) vô nghiệm.
- Với $y<1$, $f(y)>f(1)=1$ do đó phương trình (1) vô nghiệm

Vậy y=1 là nghiệm duy nhất của phương trình (1). Suy ra:

$$t=2 \Leftrightarrow 2\cos x=2 \Leftrightarrow \cos x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm $x=2k\pi,\ k\in Z$.

Ví dụ 6: (Đề 78): Giải phương trình:

$$2\log_3 \text{cotg}x=\log_2\cos x.$$

Giải

Đặt $t=\log_2\cos x$, khi đó phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases}\cot gx>0\\ 2\log_3\cot gx=\log_2\cos x=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cot gx>0\\ \cos x=2^t>0\\ \cot g^2x=3^t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x>0\\ \cos x=2^t\\ \dfrac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=3^t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x>0 & (1)\\ \cos x=2^t & (2)\\ \dfrac{4^t}{1-4^t}=3^t & (3)\end{cases} \qquad (I)$$

- Giải (3)

$$4^t=3^t-12^t \Leftrightarrow 4^t+12^t=3^t \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^t+4^t=1 \qquad (4)$$

Vì VT(4) là hàm số đồng biến còn VP(4) là hàm hằng do đó nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Nhận xét rằng với t=-1, ta được $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}+4^{-1}=1$, do đó t=-1 là nghiệm.

- Giải (I)

$$\begin{cases}\sin x>0\\ \cos x=2^{-1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x>0\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình:

a. $\log_{1/3}(3+|\sin x|)=2^{|x|}-2$.

b. $\sin x+\cos x-\sin x.\cos x=1+\lg\dfrac{\sin x+\cos x+3}{\sin x.\cos x+4}$.

c. $\sin x+\log_{\cos x}(1+2^{\sin x})=\sin x.\log_{\cos x}5+\log_{\cos x}6$.

Bài tập 2. Giải các phương trình:

a. $\log_3(\text{cotg}x)=\log_2(\cos x)$.

b. (Đề 3): $\log_3(\sin\frac{x}{2}-\sin x)+\log_{\frac{1}{3}}(\sin\frac{x}{2}+\cos 2x)=0$.

c. $\log_{|\cos x|}|\sin x|+\log_{|\sin x|}|\cos x|=2$

d. $\ln[\sin(x+|x|)]=0$.

CHỦ ĐỀ 5

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC LIÊN QUAN TỚI ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Sử dụng đạo hàm tìm điều kiện của tham số để phương trình
A(x)=c
nghiệm đúng với mọi x.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt y=A(x).

Khi đó phương trình nghiệm đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y'=0,\ \forall x\\ y(x_0)=c\end{cases} \qquad (I)$$

Bước 2: Giải (I) để nhận được giá trị thích hợp của tham số.

Bước 3: Kết luận.

Ví dụ 1: Tìm a, b để phương trình sau nghiệm đúng với mọi x

$$a.\cos^2x+b[\cos^2(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^2(x-\frac{2\pi}{3})]=\frac{3}{2}$$

Giải.

Đặt $f(x)=a.\cos^2x+b[\cos^2(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^2(x-\frac{2\pi}{3})]$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2},\ \text{với } \forall x \Leftrightarrow \begin{cases}f'(x)=0,\ \forall x & (1)\\ f(0)=\dfrac{3}{2} & (2)\end{cases}$$

- Giải (1)

$$(1) \Leftrightarrow -a\sin 2x-b[\sin(2x+\frac{4\pi}{3})+\sin(2x-\frac{4\pi}{3})]=0,\ \forall x$$

$$\Leftrightarrow -a\sin 2x-2b\sin 2x.\cos\frac{4\pi}{3}=0,\ \forall x \Leftrightarrow (b-a)\sin 2x=0,\ \forall x \Leftrightarrow a=b. \qquad (3)$$

- Giải (2)

$$(2) \Leftrightarrow a+b(\cos^2\frac{2\pi}{3}+\cos^2\frac{2\pi}{3})=\frac{3}{2} \Leftrightarrow a+\frac{b}{2}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2a+b=3. \qquad (4)$$

Từ (3), (4), ta được a=b=1.

Vậy với a=b=1 phương trình nghiệm đúng với mọi x

Nhận xét: Trong hầu hết các tài liệu tham khảo hiện nay bài toán trên đều được giải bằng phương pháp điều kiện cần và đủ, như vậy từ đây chúng ta ghi nhận thêm một phương pháp mới " *Sử dụng đạo hàm tìm điều kiện của tham số để phương trình nhận* $\forall x\in D$ *làm nghiệm* ", bạn đọc có thể tham khảo thêm trong hai cuốn

1. *Phương pháp giải Toán Phương trình, Bất phương trình và Hệ Đại số*

2 *Phương pháp giải Toán hàm số*
của Lê Hồng Đức và để sáng tỏ hơn chúng ta đi xem xét thêm ví dụ sau:

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình sau nghiệm đúng với mọi x

$$\sin^m x+\cos^m x=1$$

Giải.

Đặt $f(x)=\sin^m x+\cos^m x$

$$\Rightarrow f(x)=1,\ \text{với } \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)=0,\ \forall x & (1)\\ f(45^0)=1 & (2)\end{cases}$$

Giải (1): Ta được:

$$m.\cos x.\sin^{m-1}x-m\sin x.\cos^{m-1}x=0,\ \forall x$$

$$\Leftrightarrow m.\sin x.\cos x(\sin^{m-2}x-\cos^{m-2}x)=0,\ \forall x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\\ \sin^{m-2}x=\cos^{m-2}x,\ \forall x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\\ m=2\end{array}\right..$$

Giải (2): Ta xét từng trường hợp:

- Với m=0, ta được:

$$f(45^0)=\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^0+\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^0=2,\ \text{không thoả mãn.}$$

- Với m=2, ta được:

$$f(45^0)=\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2=1,\ \text{thoả mãn.}$$

Vậy với m=2 phương trình nghiệm đúng với mọi x

Bài toán 2: Sử dụng tích phân chứng minh phương trình có nghiệm

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh phương trình f(x)=0 có nghiệm trên (a, b) với f(x) là hàm số liên tục trên [a, b], ta có thể thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$.

Bước 2: Nếu I=0 thì kết luận phương trình f(x)=0 có ít nhất một nghiệm trong (a, b).

Lưu ý: Ta cũng biết nhiều bài toán yêu cầu " *Chứng minh rằng phương trình có nghiệm với mọi tham số* ", khi đó ta cần lựa chọn [a, b] thích hợp để I=0.

Ví dụ 3: CMR phương trình:

$$a\cos x+b\cos2x+c.\cos3x=0 \text{ có nghiệm với mọi a, b, c.}$$

Giải.

Xét hàm số $f(x)=a\cos x+b\cos2x+c.\cos3x$, ta có :

$$I=\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^\pi(a\cos x+b\cos2x+c\cos3x)dx=\left(a\sin x+\frac{b}{2}\sin2x+\frac{c}{3}\sin3x\right)\Big|_0^\pi$$
$$=0$$

Vậy phương trình f(x)=0 có ít nhất một nghiệm trong (0, π) với mọi a, b, c.

Mở rộng:

- Phương trình $\sum_{i=1}^n a_i\cos(ix)=0$ luôn có nghiệm với mọi $a_i\in R$, $i=\overline{1,n}$ bởi:

$$\int_0^\pi\sum_{i=1}^n a_i\cos(ix)dx=\sum_{i=1}^n\int_0^\pi a_i\cos(ix)dx=\left[\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{i}\sin(ix)\right]\Big|_0^\pi=0.$$

- Phương trình $\sum_{i=1}^n a_i\sin(ix)=0$ luôn có nghiệm với mọi $a_i\in R$, $i=\overline{1,n}$ bởi:

$$\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^n a_i\sin(ix)dx=\sum_{i=1}^n\int_0^{2\pi} a_i\sin(ix)dx=\left[\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{i}\cos(ix)\right]\Big|_0^{2\pi}=0.$$

Bài toán 3: Giải phương trình tích phân chứa hàm lượng giác

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có thể thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định tích phân trong phương trình.

Bước 2: Giải phương trình lượng giác.

Ví dụ 4: (Đề 70): Giải phương trình:

$$\int_0^x\left(4\sin^4t-\frac{3}{2}\right)dt=0. \qquad (1)$$

Giải.

Trước hết ta đi xác định:

$$\int_0^x\left(4\sin^4t-\frac{3}{2}\right)dt=\int_0^x\left(\frac{1}{2}\cos4t-2\cos2t\right)dt=\left(\frac{1}{8}\sin4t-\sin2t\right)\Big|_0^x$$
$$=\frac{1}{8}\sin4x-\sin2x. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\frac{1}{8}\sin4x-\sin2x=0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{4}\cos2x-1\right)\sin2x=0\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in Z.$$

Ví dụ 5: (Đề 126): Tìm tất cả các nghiệm của phương trình:

$$\int_0^x\cos(t-x^2)dt=\sin x.$$

Giải.

Trước hết ta đi xác định:

$$I=\int_0^x\cos(t-x^2)dt=\sin(t-x^2)\Big|_0^x=\sin(x-x^2)-\sin(-x^2)=\sin x^2-\sin(x^2-x). \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\sin x^2-\sin(x^2-x)=\sin x\Leftrightarrow 2\cos\frac{2x^2-x}{2}\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2}=0\\ \cos\frac{2x^2-x}{2}=\cos\frac{x}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ \frac{2x^2-x}{2}=-\frac{x}{2}+2l\pi\\ \frac{2x^2-x}{2}=\frac{x}{2}+2m\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\pm\sqrt{2l\pi},\ l=0,1,...\\ x=\frac{1\pm\sqrt{1+8m\pi}}{2},\ m=0,1,...\end{array}\right.$$

II. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm a, b sao cho các phương trình sau nghiệm đúng với mọi x

a $a.\cos^2x+b[\cos^2(x+\frac{\pi}{3})+\cos^2(x-\frac{\pi}{3})]=\frac{3}{2}$

b $a(\cos x-1)-\cos(ax+b^2)+b^2+1=0$

Bài tập 2: Tìm a, b sao cho phương trình sau nghiệm đúng với mọi x

a $a.\cos4x+4a.\cos2x+b=\cos^4x$.

b $2a.\sin x-a.\sin3x+b\sin5x=\sin^5x$.

Bài tập 3: Tìm nghiệm $x\in[2, 3]$ của phương trình

$$\int_0^x\cos(t+x^2)dt=\sin x.$$

Bài tập 4: (ĐHMĐC - 99): Cho f(x) liên tục, xác định trên $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ có $f(0)>0$ và $\int_0^{\pi/2}f(x)dx<1$. CMR phương trình

$$f(x)=\sin x \text{ có nghiệm thuộc } \left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Bài tập 5: Tìm nghiệm $x\in[0,+\infty)$ của phương trình

$$\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)^3}}=\sin x.$$

Bài tập 6: Tìm nghiệm $x\in[0, 1)$ của phương trình

$$\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)^3}}=\operatorname{tg}x$$

PHẦN III

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HOÁ

CHƯƠNG I

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HOÁ GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

CHỦ ĐỀ 1

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Phương pháp lượng giác hoá để chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức với mục đích thay đổi hình thức của bài toán chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức đại số thành việc chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác.

Ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Lượng giác hoá đẳng thức.

Bước 2: Thực hiện việc chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác.

Chú ý: Các em học sinh cần ôn lại các phương pháp chứng minh đẳng thức và bất đẳng thức lượng giác, để có thể nhanh chóng tiếp cận được phương pháp này.

II.VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng:

$$|4[a^3-\sqrt{(1-a^2)^3}]-3(a-\sqrt{1-a^2})|\le\sqrt{2}.$$

Giải

Điều kiện :

$1-a^2\ge0 \Leftrightarrow |a|\le1$.

Đặt $a=\cos\alpha$, với $\alpha\in[0, \pi]$.

Khi đó bất đẳng thức được biến đổi về dạng:

$$|4[\cos^3\alpha-\sqrt{(1-\cos^2\alpha)^3}]-3(\cos\alpha-\sqrt{1-\cos^2\alpha})|\le\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |4(\cos^3\alpha-\sin^3\alpha)-3(\cos\alpha-\sin\alpha)|\le\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)+(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)|\le\sqrt{2} \Leftrightarrow |\cos3\alpha+\sin3\alpha|\le\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |\cos(3\alpha-\frac{\pi}{4})|\le1, \text{ luôn đúng.}$$

Ví dụ 2: Cho các số a, b thoả mãn $|b|\le|a|$. CMR:

$$|a+b|+|a-b|=|a+\sqrt{a^2-b^2}|+|a-\sqrt{a^2-b^2}|. \qquad (1)$$

Giải

Ta đi xét các trường hợp sau:

- Nếu $a=0 \Rightarrow b=0$, khi đó (1) luôn đúng.
- Nếu $a\neq0$, biến đổi (1) về dạng:

$$\left|1+\frac{b}{a}\right|+\left|1-\frac{b}{a}\right|=\left|1+\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right|+\left|1-\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right|. \qquad (2)$$

Đặt $\frac{b}{a}=\cos\alpha$, $\alpha\in[0,\pi]$, khi đó (2) có dạng:

$|1+\cos\alpha|+|1-\cos\alpha|=|1+\sin\alpha|+|1-\sin\alpha|$

$\Leftrightarrow 1+\cos\alpha+1-\cos\alpha=1+\sin\alpha+1-\sin\alpha \Leftrightarrow 2=2$ luôn đúng.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2-1}+\sqrt{3}\le2|a|.$$

Giải

Điều kiện :

$a^2-1\ge0 \Leftrightarrow |a|\ge1$.

Đặt $|a|=\frac{1}{\cos\alpha}$, với $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2})$.

Khi đó bất đẳng thức được biến đổi về dạng:

$$\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}+\sqrt{3}\le\frac{2}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \text{tg}\alpha+\sqrt{3}\le\frac{2}{\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha\le2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\le1$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\le1, \text{ luôn đúng.}$$

Chú ý: Các ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ quan tâm tới các ví dụ có nhiều hơn một biến.

Ví dụ 4: Cho các số a, b, c, d thoả mãn $a^2+b^2=1$ và $c^2+d^2=1$. CMR:

$$|ac+bd|\le1.$$

Giải

Từ giả thiết :

$a^2+b^2=1$, đặt $a=\sin\alpha$ & $b=\cos\alpha$, $\alpha\in[0,2\pi)$.

$c^2+d^2=1$, đặt $c=\sin\beta$ & $b=\cos\beta$, $\beta\in[0,2\pi)$.

Khi đó:

$|ac+bd|=|\sin\alpha.\sin\beta+\cos\alpha.\cos\beta|=|\cos(\alpha+\beta)|\le1$ đpcm.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng:

$$|1+ab|\le\sqrt{a^2+1}.\sqrt{b^2+1}.$$

Giải

Đặt $a=\text{tg}\alpha$ & $b=\text{tg}\beta$, với $\alpha,\beta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Khi đó bất đẳng thức được biến đổi về dạng:

$$|1+\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta|\le\sqrt{\text{tg}^2\alpha+1}.\sqrt{\text{tg}^2\beta+1} \Leftrightarrow \left|1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right|\le\frac{1}{\cos\alpha}.\frac{1}{\cos\beta}$$

$\Leftrightarrow |\cos(\alpha-\beta)|\le1$, luôn đúng.

Ví dụ 6: Nếu $a+b+c-abc=1-ab-bc-ca$. CMR:

$$\frac{1-a^2}{a}+\frac{1-b^2}{b}+\frac{1-c^2}{c}=\frac{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}{4abc}.$$

Giải

Đặt $a=\text{tg}\alpha$, $b=\text{tg}\beta$, $c=\text{tg}\gamma$, với $\alpha,\beta,\gamma\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Từ giả thiết ta có:

$$\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta+\text{tg}\gamma-\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta.\text{tg}\gamma=1-\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta-\text{tg}\beta.\text{tg}\gamma-\text{tg}\gamma.\text{tg}\alpha. \qquad (1)$$

Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $1-\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta-\text{tg}\beta.\text{tg}\gamma-\text{tg}\gamma.\text{tg}\alpha=0$, ta được:

$$\begin{cases}\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta+\text{tg}\beta.\text{tg}\gamma+\text{tg}\gamma.\text{tg}\alpha=1\\ \text{tg}\alpha+\text{tg}\beta+\text{tg}\gamma=\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta.\text{tg}\gamma\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \alpha+\beta+\gamma=l\pi\end{cases} \text{ mâu thuẫn.}$$

Trường hợp 2: Nếu $1-\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta-\text{tg}\beta.\text{tg}\gamma-\text{tg}\gamma.\text{tg}\alpha\neq0$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta+\text{tg}\gamma-\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta.\text{tg}\gamma}{\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta+\text{tg}\beta.\text{tg}\gamma+\text{tg}\gamma.\text{tg}\alpha}=1 \Leftrightarrow \text{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=1$$

$$\Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow 2\alpha+2\beta+2\gamma=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}2\alpha.\text{tg}2\beta-\text{tg}2\beta.\text{tg}2\gamma-\text{tg}2\gamma.\text{tg}2\alpha=1$$

$$\Leftrightarrow \text{cotg}2\alpha+\text{cotg}2\beta+\text{cotg}2\gamma=\text{cotg}2\alpha.\text{cotg}2\beta.\text{cotg}\gamma. \qquad (2)$$

Nhận xét rằng:

$$\text{cotg}2\alpha=\frac{1-a^2}{a},\ \text{cotg}2\beta=\frac{1-b^2}{b},\ \text{cotg}2\gamma=\frac{1-c^2}{c}. \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2) suy ra điều phải chứng minh.

Chú ý: Cũng có thể giải bài toán bằng phương pháp đồng bậc.

III.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: Cho $|a|\le 1$, chứng minh rằng:

$$(1-a)^n+(1+a)^n\le 2^n,\ \forall n\in N \text{ và } n\ge 2.$$

BÀI GIẢI

Từ giả thiết $|a|\le 1$, đặt $a=\cos 2\alpha$, $\alpha\in[0,\ \frac{\pi}{2}]$.

Khi đó:

$$VT=(1-\cos 2\alpha)^n+(1+\cos 2\alpha)^n=2^n.\sin^n\alpha+2^n.\cos^n\alpha=2^n.(\sin^n\alpha+\cos^n\alpha)$$
$$\le 2^n.(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2^n=VP.$$

Bài 2: Chứng minh rằng:

$$|a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}+\sqrt{3}\,[ab-\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\,]|\le 2.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện :

$$\begin{cases}1-a^2\ge 0\\ 1-b^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|\le 1\\ |b|\le 1\end{cases}$$

Đặt

$$\begin{cases}a=\sin\alpha\\ b=\sin\beta\end{cases},\ \text{với } \alpha,\ \beta\in[0,\ \pi].$$

Khi đó bất đẳng thức được biến đổi về dạng:

$$|\sin\alpha.\sqrt{1-\sin^2\beta}+\sin\beta.\sqrt{1-\sin^2\alpha}+$$
$$+\sqrt{3}\,[\,\sin\alpha.\sin\beta-\sqrt{(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)}\,]|\le 2$$

$$\Leftrightarrow |\sin\alpha.\cos\beta+\sin\beta.\cos\alpha+\sqrt{3}\,(\sin\alpha.\sin\beta-\cos\alpha.\cos\beta)|\le 2$$

$$\Leftrightarrow |\sin(\alpha+\beta)-\sqrt{3}\cos(\alpha+\beta)|\le 2\Leftrightarrow |\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\alpha+\beta)|\le 1$$

$$\Leftrightarrow |\sin(\alpha+\beta-\frac{\pi}{3})|\le 1,\ \text{luôn đúng.}$$

Bài 3: Nếu x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình

$$x^3+ax^2+x+b=0\ (b\ne 0).$$

CMR $$(x_1-\frac{1}{x_1})(x_2-\frac{1}{x_2})+(x_2-\frac{1}{x_2})(x_3-\frac{1}{x_3})+(x_3-\frac{1}{x_3})(x_1-\frac{1}{x_1})=4.\qquad(1)$$

BÀI GIẢI

Từ giả thiết ta có:

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1 \text{ và vì } b\ne 0 \text{ do đó } x_1,\ x_2,\ x_3\ne 0.$$

Đặt $x=tgA$, $y=tgB$, $z=tgC$, với A, B, $C\in(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$.

Ta có:

$$tgA.tgB+tgB.tgC+tgC.tgA=1\Leftrightarrow A+B+C=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow 2A+2B+2C=\pi+2k\pi.\qquad(2)$$

và

$$(1)\Leftrightarrow (tgA-cotgA)(tgB-cotgB)+(tgB-cotgB)(tgC-cotgC)+$$
$$+(tgC-cotgC)(tgA-cotgA)=4$$
$$\Leftrightarrow (-2\,cotg2A)(-2\,cotg2B)+(-2cotg2B)(-2cotg2C)+$$
$$+(-2cotg2C)(-2\,cotg2A)=4$$
$$\Leftrightarrow cotg2A\,cotg2B+cotg2B\,cotg2C+cotg2C\,cotg2A)=1$$
$$\Leftrightarrow 2A+2B+2C=\pi+2k\pi,\ \text{luôn đúng do (2).}$$

IV.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho $a^2+b^2+c^2+2abc=1$ và $0<a,\ b,\ c<1$, chứng minh rằng:

$$abc+1=c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}+a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}$$

Bài tập 2: Cho $ab+bc+ca=1$, chứng minh rằng:

$$4abc=a(1-b^2)(1-c^2)+b(1-c^2)(1-a^2)+c(1-a^2)(1-b^2).$$

Bài tập 3: Cho $a+b+c=abc$, chứng minh rằng:

$$2abc=a(1-b^2)(1-c^2)+b(1-c^2)(1-a^2)+c(1-a^2)(1-b^2).$$

Bài tập 4: Cho $a+b+c=abc$ và $ab+bc+ca\ne 1$, chứng minh rằng:

$$abc=\frac{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}{ab+bc+ca-1}.$$

Bài tập 5: Chứng minh rằng:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}.$$

Bài tập 6: Chứng minh rằng:

$$\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca}=\frac{a-b}{1+ab}.\frac{b-c}{1+bc}.\frac{c-a}{1+ca},$$

với điều kiện ab, bc, $ca\ne -1$.

Bài tập 7: Cho $a+b+c=abc$, chứng minh rằng:

$$\frac{3a-a^3}{1-3a^2}+\frac{3b-b^3}{1-3b^2}+\frac{3c-c^3}{1-3c^2}=\frac{3a-a^3}{1-3a^2}.\frac{3b-b^3}{1-3b^2}.\frac{3c-c^3}{1-3c^2}.$$

Bài tập 8: Cho $x^2+y^2=1$, chứng minh rằng:

a. $|x+y|\le\sqrt{2}$.

b. $\left|\frac{x}{y+2}\right|\le\frac{1}{\sqrt{3}}$.

c. $\frac{1}{4}\le x^4+y^4\le 1$.

Bài tập 9: Cho các số a, b, c, d thoả mãn $a^2+b^2=1$ và $c^2+d^2=1$, CMR:

$$|a(c-d)+b(c+d)|\le\sqrt{2}.$$

Bài tập 10: Cho $4a^2+9b^2=25$, chứng minh rằng:

$$|6a+12b|\le 25.$$

Bài tập 11: Chứng minh rằng:

$$|a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}| \le 1.$$

Bài tập 12: Cho các số a, b, c thoả mãn $0<c\le a$, $c\le b$,. CMR:

$$\sqrt{(a-c)c} + \sqrt{(b-c)c} \le \sqrt{ab}.$$

Bài tập 13: Cho $x^2+y^2-2x-4y+4=0$, chứng minh rằng:

$$|x^2-y^2+2\sqrt{3}xy-2(1+2\sqrt{3})x+2(2-\sqrt{3})y-3-4\sqrt{3}| \le 2.$$

Bài tập 14: Chứng minh rằng:

a. $|4a+3\sqrt{9-a^2}| \le 15$.

b. $|\sqrt{3}(2a^2-1)+2a\sqrt{1-a^2}| \le 2$.

c. $\sqrt{a^{2003}} + \sqrt{(1-a^2)^{2003}} \ge 1$.

d. $-4 \le \dfrac{5-12\sqrt{a^2-1}}{a^2} \le 9$.

Bài tập 15: Cho $a^2+b^2=1$ và $c^2+d^2=1$, chứng minh rằng:

a $|(a-b)(c+d)+(a+b)(c-d)| \le 2$.

b $|(a+b)(c+d)+(a-b)(c-d)| \le 2$.

Bài tập 16: Chứng minh rằng:

a. $\left|\dfrac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2).(1+b^2)}\right| \le \dfrac{1}{2}$.

b. $\left|\dfrac{(a^2-b^2)(1-a^2b^2)}{(1+a^2)^2.(1+b^2)^2}\right| \le \dfrac{1}{4}$.

Bài tập 17: Cho x, y thoả mãn $2x+5y=7$, chứng minh rằng:

$$x^2+y^2 \ge \frac{49}{29}.$$

Bài tập 18: Chứng minh rằng với mọi x, y ta luôn có:

$$4(x^2+y^2).\sin^2\frac{\pi}{10} \le x^2+(x-y)^2.$$

Bài tập 19: Cho các số a, b, c thoả mãn $0<c\le a$, $c\le b$. CMR:

$$\sqrt{(a+c)b} + \sqrt{(b+c)a} \ge 2\sqrt{2c}.$$

Bài tập 20: Chứng minh rằng với mọi a, b, c ta luôn có:

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+1}.\sqrt{b^2+1}} + \frac{|b-c|}{\sqrt{b^2+1}.\sqrt{c^2+1}} \ge \frac{|c-a|}{\sqrt{c^2+1}.\sqrt{a^2+1}}.$$

Bài tập 21: Cho các số a, b, c là ba cạnh của một tam giác, x, y thoả mãn $ax+by=c$. CMR:

$$x^2+y^2 \ge \frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

Bài 4: Cho $ab+bc+ca=1$, chứng minh rằng:

$$a+b+c-3abc=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2).$$

CHỦ ĐỀ 2

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ ĐẠI SỐ

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Phương pháp lượng giác hoá để giải phương trình, bất phương trình và hệ đại số với mục đích thay đổi hình thức của bài toán giải phương trình, bất phương trình và hệ đại số đại số thành việc giải phương trình, bất phương trình và hệ lượng giác.

Ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 3: Lượng giác hoá.

Bước 1: Thực hiện việc giải phương trình, bất phương trình và hệ lượng giác nhận được.

Chú ý: Các em học sinh cần ôn lại các phương pháp giải phương trình và hệ lượng giác, để có thể nhanh chóng tiếp cận được phương pháp này.

II.VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: (Đề 130): Giải bất phương trình:

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \le x.$$

Giải

Điều kiện :

$$\begin{cases} 1+x \ge 0 \\ 1-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le 1. \qquad (*)$$

Với điều kiện (*), đặt $x=\cos t$, $t\in[0, \pi]$. (**)

Khi đó bất phương trình được chuyển về dạng :

$$\sqrt{1+\cos t} - \sqrt{1-\cos t} \le \cos t \Leftrightarrow \sqrt{1+\cos t} - \sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}} \le \cos t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}) \le \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2})(\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2} - \sqrt{2}) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4})[\sqrt{2}\cos(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4})[\cos(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4})-1] \ge 0 \Leftrightarrow \cos(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}) \le 0 \overset{(**)}{\Leftrightarrow} \frac{\pi}{2} \le \frac{t}{2}+\frac{\pi}{4} \le \pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -1 \le \cos t \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 0.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $-1\le x\le 0$.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x(1+2\sqrt{1-x^2}).$$

Giải

Điều kiện

$$1-x^2\ge 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 1. \qquad (1)$$

Đặt x=sint với $t\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\sin^2 t}}=\sin t(1+2\sqrt{1-\sin^2 t}) \Leftrightarrow \sqrt{1+\cos t}=\sin t(1+2\cos t)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}=\sin t+\sin 2t \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}=2\sin\frac{3t}{2}\cos\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}(1-\sqrt{2}\sin\frac{3t}{2})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{t}{2}=0 \ (l)\\ \sin\frac{3t}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{6}\\ t=\frac{\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ x=1\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{1}{2}$ hoặc x=1.

Nhận xét: Như vậy bằng việc lựa chọn phương pháp lượng giác hoá, chúng ta đã chuyển phương trình ban đầu về phương trình lượng giác và để giải phương trình đó chúng ta đã lựa chọn phương pháp biến đổi thành tích.

Ví dụ tiếp theo vẫn sử dụng phương pháp lượng giác hoá, xong ở đây chúng ta sẽ nhận được phương trình lượng giác dạng đối xứng với sin và cos.

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=2\sqrt{2}. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases}x^2-1>0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow x>1. \qquad (*)$$

Với điều kiện (*), đặt $x=\frac{1}{\cos t}$, $t\in(0, \frac{\pi}{2})$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$\frac{1}{\cos t}+\frac{\frac{1}{\cos t}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\sin t}=2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin t+\cos t=2\sqrt{2}\sin t.\cos t.$$

Đặt sint+cost=u, điều kiện $1\le u\le\sqrt{2}$, suy ra $\sin t.\cos t=\frac{u^2-1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$u=\sqrt{2}(u^2-1) \Leftrightarrow \sqrt{2}u^2-u-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=\sqrt{2}\\ u=-\frac{1}{\sqrt{2}} \ (l)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin t+\cos t=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(t+\frac{\pi}{4})=1 \Leftrightarrow t+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=\sqrt{2}$.

Ví dụ 4: **Với a≠0, giải bất phương trình**

$$\sqrt{x^2+a^2}\le x+\frac{2a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Giải

Đặt x=|a|tgt, với $t\in(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Khi đó bất phương trình có dạng:

$$\frac{|a|}{\cos t}\le|a|\text{tg}t+\frac{2a^2.\cos t}{|a|} \Leftrightarrow 1\le\sin t+2\cos^2 t \Leftrightarrow 2\sin^2 t-\sin t-1\le 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le\sin t\le 1 \Leftrightarrow \text{tg}t\ge-\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x\ge-\frac{|a|}{\sqrt{3}}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge-\frac{|a|}{\sqrt{3}}$.

Chú ý: Như vậy chúng ta sử dụng phương pháp lượng giác hoá để giải các phương trình vô tỉ, khi đó một câu hỏi thường được các em học sinh khá, giỏi đặt ra là " *Phương pháp lượng giác hoá có thể được sử dụng trong các phương trình đa thức không ?* ".

Câu trả lời là có thể và còn hơn thế nữa là với phương trình bậc ba dạng:

$$4x^3-3x=m, \text{ với } |m|\le 1$$

nó là sự lựa chọn rất hiệu quả, cụ thể ta sẽ thực hiện theo ba bước sau:

Bước 1: Đặt $m=\cos\varphi=\cos(\varphi\pm 2\pi)$

Bước 2: Nhận xét rằng :

$$\cos\varphi=\cos(3.\frac{\varphi}{3})=4\cos^3\frac{\varphi}{3}-3\cos\frac{\varphi}{3}$$

$\Rightarrow x_1=\cos\frac{\varphi}{3}$ là một nghiệm của phương trình.

Tương tự $x_{2,3}=\cos\frac{\varphi\pm 2\pi}{3}$ là nghiệm của phương trình.

Bước 3: Vậy phương trình có ba nghiệm $x_1=\cos\frac{\varphi}{3}$, $x_{2,3}=\cos\frac{\varphi\pm 2\pi}{3}$.

Để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 5: Giải phương trình:

$$4x^3-3x=\frac{1}{2}.$$

Giải

Ta có :

$$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}=\cos(\frac{\pi}{3}\pm 2\pi)=\cos\frac{\pi\pm 6\pi}{3}.$$

Nhận xét rằng :

$$\cos\frac{\pi}{3}=\cos(3.\frac{\pi}{9})=4\cos^3\frac{\pi}{9}-3\cos\frac{\pi}{9}$$

$\Rightarrow x_1=\cos\frac{\pi}{9}$ là một nghiệm của phương trình.

Tương tự ta cũng được $x_{2,3}=\cos\frac{\pi\pm 6\pi}{9}$ là nghiệm của phương trình

Vậy phương trình có ba nghiệm $x_1=\cos\frac{\pi}{9}$, $x_2=\cos\frac{7\pi}{9}$, $x_3=\cos\frac{5\pi}{9}$.

Chú ý: Ngay cả đối với các phương trình đa thức khác cũng có thể sử dụng phương pháp lượng giác hoá, để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 6: Giải phương trình:

$$8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1.$$

Giải

Ta có xét các trường hợp :

a. Với x≥1, suy ra VT>1, do đó phương trình vô nghiệm.

b. Với x≤-1, suy ra VT<0, do đó phương trình vô nghiệm.

c. Với |x|<1, đặt x=cost, với t∈(0, π).

Khi đó phương trình được chuyển về dạng:

$$8\cos t.(2\cos^2 t-1)(8\cos^4 t-8\cos^2 t+1)=1$$

$$\Leftrightarrow 8\cos t.\cos 2t.\cos 4t=1 \Leftrightarrow 8\sin t.\cos t.\cos 2t.\cos 4t=\sin t$$

$$\Leftrightarrow \sin 8t=\sin t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8t=t+2k\pi \\ 8t=\pi-t+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{2k\pi}{7} \\ t=\frac{\pi+2k\pi}{9} \end{array}\right.$$

$$\overset{t\in(0,\pi)}{\Leftrightarrow} t\in\{\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}\}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm

$$x\in\{\cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}, \cos\frac{\pi}{9}, \cos\frac{\pi}{3}, \cos\frac{5\pi}{9}, \cos\frac{7\pi}{9}\}.$$

Chú ý: Các ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ quan tâm tới việc sử dụng phương pháp lượng giác hoá cho các phương trình chứa tham số.

Ví dụ 7: Giải và biện luận phương trình:

$$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=m. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ 1-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le 1. \qquad (*)$$

Nhận xét rằng:

$$(\sqrt{x})^2+(\sqrt{1-x})^2=1,$$

nên đặt:

$$\begin{cases} \sqrt{x}=\cos t \\ \sqrt{1-x}=\sin t \end{cases}, \text{ với } t\in[0, \frac{\pi}{2}]. \qquad (**)$$

Khi đó phương trình có dạng:

$$\cos t+\sin t=m \Leftrightarrow \cos(t-\frac{\pi}{4})=\frac{m}{\sqrt{2}}.$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$$-1\le\frac{m}{\sqrt{2}}\le 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2} \qquad (***)$$

với điều kiện đó ta đặt $\frac{m}{\sqrt{2}}=\cos\alpha$, α∈[0, π].

Ta được:

$$\cos(t-\frac{\pi}{4})=\cos\alpha \Leftrightarrow t-\frac{\pi}{4}=\pm\alpha+2k\pi \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}\pm\alpha+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\cos^2(\frac{\pi}{4}\pm\alpha+2k\pi) \Leftrightarrow x=\cos^2(\frac{\pi}{4}\pm\alpha).$$

Ví dụ 8: Biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$$\sqrt{12-3x^2}=x-m. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện:

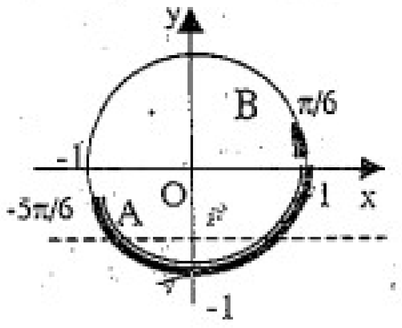
$$12-3x^2\ge 0 \Leftrightarrow |x|\le 2. \qquad (*)$$

Với điều kiện (*), đặt x=2sint với $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$2\sqrt{3}\cos t=2\sin t-m \Leftrightarrow 2\sin t-2\sqrt{3}\cos t=m$$

$$\Leftrightarrow \sin(t-\frac{\pi}{3})=\frac{m}{4}.$$



DIỄN ĐÀN TOÁN - LÍ - HOÁ CẤP 2-3 ĐỊA CHỈ: 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

Vì $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6} \le t-\frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{6}$, từ đó dựa vào đường tròn đơn vị, ta có số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đường thẳng $y=\frac{m}{4}$ với cung tròn AB, do đó (lập luận tương tự như trong chú ý của ví dụ 6):

- Với m<-4 hoặc m>2 thì (1) vô nghiệm.
- Với m=-4 hoặc -2<m<2 thì (1) có nghiệm duy nhất.
- Với -4<m≤-2 thì có 2 nghiệm phân biệt

Chú ý: Như vậy, tới đây chúng ta đã sử dụng phương pháp lượng giác hoá cho các phương trình bằng việc lượng giác hoá các biến số và một câu hỏi nữa lại được đặt ra là " *Việc lượng giác hoá có thể được sử dụng cho tham số của phương trình không ?* ".

Câu trả lời là có, xuất phát từ ý tưởng:

Với t=tgx suy ra:

$$\sin 2x=\frac{2t}{1+t^2} \ \& \ \cos 2x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

ngược lại nếu đặt m=tgt suy ra:

$$\sin 2t=\frac{2m}{1+m^2} \ \& \ \cos 2t=\frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

Để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 9: Giải phương trình:

$$(1-m^2)^x+(2m)^x=(1+m^2)^x, \text{ với } 0<m<1.$$

Giải

Ta có $(1+m^2)^x>0$ với mọi x, do đó biến đổi phương trình về dạng:

$$\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)^x+\left(\frac{2m}{1+m^2}\right)^x=1.$$

Đặt m=tgt với $t\in(0, \frac{\pi}{4})$ suy ra $\frac{2m}{1+m^2}=\sin 2t$ & $\frac{1-m^2}{1+m^2}=\cos 2t$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$(\sin 2t)^x+(\cos 2t)^x=1$$

Nhận xét rằng

- Với x=2, là nghiệm của phương trình
- Với x>2 ta có:

$$\begin{cases}(\sin 2t)^x<\sin^2 x\\(\cos 2t)^x<\cos^2 x\end{cases} \Rightarrow \text{VT}<1, \text{ phương trình vô nghiệm.}$$

- Với x<2 ta có:

$$\begin{cases}(\sin 2t)^x>\sin^2 x\\(\cos 2t)^x>\cos^2 x\end{cases} \Rightarrow \text{VT}>1, \text{ phương trình vô nghiệm.}$$

Vậy với 0<m<1, phương trình có nghiệm duy nhất x=2.

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{2y}{1+y^2}=x\\ \frac{2x}{1+x^2}=y\end{cases}$$

Giải

Đặt:

$$\begin{cases}x=\text{tg}\alpha\\y=\text{tg}\beta\end{cases}, \text{ với } \alpha, \beta\in(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \qquad (*)$$

Khi đó hệ được chuyển về dạng:

$$\begin{cases}\frac{2\text{tg}\beta}{1+\text{tg}^2\beta}=\text{tg}\alpha\\ \frac{2\text{tg}\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}=\text{tg}\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2\beta=\text{tg}\alpha \quad (1)\\ \sin 2\alpha=\text{tg}\beta \quad (2)\end{cases} \qquad (I)$$

Ta đi xét hai trường hợp:

- Nếu sinα=0 thì sinβ=0 và ngược lại, suy ra x=y=0 là nghiệm của hệ.
- Xét sinα≠0 & sinβ≠0

Nhân theo vế hai phương trình của hệ (I), ta được :

$$\sin 2\alpha.\sin 2\beta=\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta$$

$$\Leftrightarrow 4\cos\alpha.\cos\beta=\frac{1}{\cos\alpha.\sin\beta} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \cos\alpha.\cos\beta=\frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Biến đổi (1) về dạng :

$$2\sin\beta.\cos\beta.\cos\alpha=\sin\alpha \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \sin\beta=\sin\alpha \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \beta=\alpha. \qquad (4)$$

Thay (4) vào (3), ta được :

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2\alpha=0$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Khi đó nghiệm của hệ là:

$$x=y=tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right) \overset{k,l\in Z}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ x=y=1 \\ x=y=-1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ có 3 cặp nghiệm.

Ví dụ 11: Xác định các giá trị của m để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x\sqrt{1-y^2}=m \\ y\sqrt{1-x^2}=2m \end{cases} \qquad (I)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử hệ có nghiệm (x_0, y_0) suy ra:

$$\begin{cases} |x_0|\le 1 \\ |y_0|\le 1 \end{cases}$$

Suy ra tồn tại hai góc α, β $\in\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho:

$$\begin{cases} x_0=\sin\alpha \\ y_0=\sin\beta \end{cases}.$$

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha.\cos\beta=m \\ \sin\beta.\cos\alpha=2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\alpha+\beta)=3m \\ \sin(\alpha-\beta)=-m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |3m|\le 1 \\ |-m|\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow |m|\le\frac{1}{3}.$$

Vậy $|m|\le\frac{1}{3}$ là điều kiện cần để hệ có nghiệm.

Điều kiện đủ:

Với $|m|\le\frac{1}{3}$, bằng phép đặt ẩn phụ:

$$\begin{cases} x=\sin\alpha \\ y=\sin\beta \end{cases}, \text{ với } -\frac{\pi}{2}\le\alpha,\ \beta\le\frac{\pi}{2}.$$

Hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta)=3m \\ \sin(\alpha-\beta)=-m \end{cases} \overset{|m|\le\frac{1}{3}}{\longleftrightarrow} \begin{cases} \alpha+\beta=u_0 \\ \alpha-\beta=v_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{u_0+v_0}{2} \\ \beta=\dfrac{u_0-v_0}{2} \end{cases} \qquad (*)$$

Điều đó chứng tỏ hệ có nghiệm.

Vậy $|m|\le\frac{1}{3}$ hệ có nghiệm.

III.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: (HVQHQT Khối D 2000): Phương trình:

$$4x^3-3x=\sqrt{1-x^2}$$

có bao nhiêu nghiệm.

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$1-x^2\ge 0 \Leftrightarrow |x|\le 1.$ (*)

Với điều kiện (*), đặt x=cost, t∈[0, π]. (**)

Khi đó phương trình được chuyển về dạng:

$$4\cos^3t-3\cos t=\sqrt{1-\cos^2 t} \Leftrightarrow \cos 3t=|\sin t|$$

$$\overset{(**)}{\Leftrightarrow} \cos 3t=\sin t \Leftrightarrow \cos 3t=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t=\frac{\pi}{2}-t+2k\pi \\ 3t=-\frac{\pi}{2}+t+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \\ t=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. \overset{(**)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{8} \\ t=\frac{5\pi}{8} \\ t=\frac{3\pi}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\cos\frac{\pi}{8} \\ x=\cos\frac{5\pi}{8} \\ x=\cos\frac{3\pi}{4} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Bài 2: (HVNH 2000) Giải phương trình:

$$1+\frac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện

$$\begin{cases} x-x^2\ge 0 \\ x\ge 0 \\ 1-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le 1. \qquad (*)$$

Với điều kiện (*), đặt $x=\cos^2t$, $t\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (**)

Khi đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$1+\frac{2}{3}\sqrt{\cos^2 t-\cos^4 t}=\sqrt{\cos^2 t}+\sqrt{1-\cos^2 t}$$

$$\Leftrightarrow 3+2|\sin t.\cos t|=|\cos t|+|\sin t| \Leftrightarrow 3+2\sin t.\cos t=3(\cos t+\sin t).$$

Đặt sint+cost=u, điều kiện $1\le u\le\sqrt{2}$, suy ra $\sin t.\cos t=\frac{u^2-1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$3+u^2-1=3u \Leftrightarrow u^2-3u+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1 \\ u=2\ (l) \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin t+\cos t=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})=1 \Leftrightarrow \sin(t+\frac{\pi}{4})=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2k\pi \\ t=\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{array}\right. \overset{(**)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\cos^2 0=1 \\ x=\cos^2\frac{\pi}{2}=0 \end{array}\right.$$

Vậy. phương trình có nghiệm là x=0 hoặc x=1.

Bài 3: Tìm m để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2}-y=0 \\ 3mx-3y=5m \end{cases}.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$1-x^2\ge 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 1.$ (*)

Từ điều kiện (*), đặt x=cost với $0\le t\le \pi$.

Khi đó (1) có dạng:

$3m.\cos t-3\sqrt{1-\cos^2 t}=5m \Leftrightarrow 3m.\cos t-3\sin t=5m$ (1)

Vậy hệ ban đầu có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm thoả mãn $\sin t\ge 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3m)^2+9\ge (5m)^2 \\ \sin t=3m.\cos t-5m\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2\le \frac{9}{16} \\ m(3\cos t-5)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4}\le m\le \frac{3}{4} \\ m\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\le m\le 0.$$

Vậy với $-\frac{3}{4}\le m\le 0$ hệ phương trình có nghiệm.

IV.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $\sqrt{x^2+1}=\frac{5}{2\sqrt{x^2+1}}+x.$

b. $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}=x.$

c. $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=2+\sqrt{1-x^2}.$

d. $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}.$

Bài tập 2: Giải các phương trình:

a. $\sqrt{1-x}-2x\sqrt{1-x^2}-2x^2+1=0.$

b. $64x^6-112x^4+56x^2-7=2\sqrt{1-x^2}.$

c. $x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=x\sqrt{2(1-x^2)}.$

d. $\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2+1}{2x}=\frac{(x^2+1)^2}{2x(1-x^2)}$

Bài tập 3: Cho phương trình:

$$\sqrt{3x}-\sqrt{1-x}=m.$$

a. Giải phương trình với $m=\sqrt{3}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 4: Cho phương trình:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=m.$$

a. Giải phương trình với $m=2-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

b. Giải và biện luận phương trình theo m.

Bài tập 5: Cho phương trình:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=m.$$

a. Giải phương trình với $m=2+\frac{2}{\sqrt{3}}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 6: Cho 0<m<1, giải các phương trình:

a. $\left(\frac{1+m^2}{2m}\right)^x-\left(\frac{1-m^2}{2m}\right)^x=1.$

b. $(1+m^2)^{x^2-6x+11}-(1-m^2)^{x^2-6x+11}=(2m)^{x^2-6x+11}.$

Bài tập 7: Tìm m để phương trình sau có nghiệm trong khoảng [0, 3]

$$x^7-(x-3)^7=m.$$

Bài tập 8: Giải phương trình:

$$4x^3-3x=-\frac{1}{2}.$$

Bài tập 9: Biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$$\sqrt{1-x^2}=x-m.$$

Bài tập 10: Với $a\neq 0$, giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2+a^2}\le x+\frac{2a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Bài tập 11: Với a>0, giải và biện luận bất phương trình

$$x+\sqrt{a^2-x^2}\le a.$$

Bài tập 12: Tìm a để bất phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{a-x}+\sqrt{x+a}>a.$$

Bài tập 13: Giải các bất phương trình:

a. $\sqrt{(1-x)^3}+\sqrt{(1+x)^3}\ge 2$

b. (Đề 108): $x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}>x\sqrt{2(1-x^2)}.$

Bài tập 14: Giải bất phương trình:

a. $\sqrt{(1-x^2)^5}+\sqrt{x^5}\le 1.$

b. $2\sqrt{6}x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}>1.$

c. $\sqrt{|(1-x^2|}+\sqrt{x^2}\le 1$

d. (Đề 86): $\frac{1}{1-x^2}>\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}-1.$

Bài tập 15: Giải các bất phương trình:

a. $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. b. $x-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}<\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 16: Với a>0, giải và biện luận bất phương trình

$$2^x+\sqrt{a^2-4^x}\le a.$$

Bài tập 17: Tìm a để bất phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{1-2^x}+2^{\frac{x}{2}}\le a.$$

Bài tập 18: Giải hệ phương trình:

a. $\begin{cases}x+\sqrt{1-y^2}=1\\ y+\sqrt{1-x^2}=1\end{cases}$. b. $\begin{cases}\dfrac{2y}{1-y^2}=x\\ \dfrac{2x}{1-x^2}=y\end{cases}$. c. $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ (x-y)(1+4xy)=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\end{cases}$.

Bài tập 19: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases}\dfrac{1-y^2}{1+y^2}=x\\ \dfrac{1-x^2}{1+x^2}=y\end{cases}$. b. $\begin{cases}\dfrac{2y}{1+y^2}=x\\ \dfrac{2x}{1+x^2}=y\end{cases}$. c. $\begin{cases}\dfrac{y^2-1}{2y}=x\\ \dfrac{x^2-1}{2x}=y\end{cases}$.

Bài tập 20: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases}x\sqrt{4-y^2}=m\\ y\sqrt{4-x^2}=m\end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình với m=1.
b. Tìm m để hệ có nghiệm.

CHƯƠNG II

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HOÁ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Phương pháp lượng giác hoá để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số với mục đích thay đổi hình thức của bài toán dẫn tới việc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số lượng giác.

Phương pháp này đặc biệt tỏ ra hiệu quả đối với các hàm đại số nhiều ẩn với dạng thường gặp nhất là:

"Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số u=f(x, y) biết $x^2+y^2=1$"

Khi đó ta lựa chọn việc đặt:

$$\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos t\end{cases},\ t\in[0, 2\pi)$$

Tóm lại:

Bài toán: Phương pháp lượng giác hoá tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Lượng giác hoá hàm số.

Bước 2: Thực hiện việc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất cả hàm số lượng giác.

Bước 3: Kết luận.

II.VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y=(1+x)^{2004}+(1-x)^{2004}$$

với $x\in[-1, 1]$.

Giải

Vì $x\in[-1, 1]$, đặt x=cost, $t\in[0, \pi]$.

Khi đó hàm số được chuyển về dạng:

$$y=(1+\cos t)^{2004}+(1-\cos t)^{2004}$$

$$=(2\cos^2\frac{t}{2})^{2004}+(2\sin^2\frac{t}{2})^{2004}$$

$$=2^{2004}(\cos^{4008}\frac{t}{2}+\sin^{4008}\frac{t}{2}).$$

Ta có nhận xét:

$$\begin{cases}\cos^{4008}\frac{t}{2}\le\cos^2\frac{t}{2}\\ \sin^{4008}\frac{t}{2}\le\sin^2\frac{t}{2}\end{cases}\Rightarrow y\le 2^{2004}(\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2})=2^{2004}.$$

do đó $y_{Max}=2^{2004}$, đạt được khi

$$\begin{cases}\cos^{4008}\frac{t}{2}=\cos^2\frac{t}{2}\\ \sin^{4008}\frac{t}{2}=\sin^2\frac{t}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos\frac{t}{2}=0\\ \cos\frac{t}{2}=\pm1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\sin\frac{t}{2}=0\\ \sin\frac{t}{2}=\pm1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\frac{t}{2}=0\\ \sin\frac{t}{2}=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin t=0\Leftrightarrow \cos t=\pm1\Leftrightarrow x=\pm1.$$

Nhận xét: Như vậy với giải thiết $x\in[-1, 1]$ ta lựa chọn được ngay phép lượng giác hoá $x=\cos t$, $t\in[0, \pi]$.

Bài toán trên còn có thể giải được bằng phương pháp hàm số - *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Trong trường hợp không có điều kiện của ẩn số, phép lượng giác hoá thường được sử dụng là $x=\mathrm{tg}t$, $t\in(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y=\frac{1+x^4}{(1+x^2)^2}.$$

Giải

Đặt $x=\mathrm{tg}t$, $t\in(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Khi đó hàm số được chuyển về dạng:

$$y=\frac{1+\mathrm{tg}^4t}{(1+\mathrm{tg}^2t)^2}=\frac{1+\frac{\sin^4t}{\cos^4t}}{\frac{1}{\cos^4t}}=\sin^4t+\cos^4t$$

$$=(\sin^2t+\cos^2t)^2-2\sin^2t.\cos^2t=1-\frac{1}{2}\sin^2 2t.$$

Vì $0\le\sin^2 2t\le1$ nên :

- $y_{Min}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, đạt được khi

$$\sin^2 2t=1\Leftrightarrow\cos2t=0\Leftrightarrow 2t=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\overset{t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow}t=\pm\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x=\pm1.$$

- $y_{Max}=1$, đạt được khi

$$\sin^2 2t=0\Leftrightarrow\sin2t=0\Leftrightarrow 2t=k\pi\Leftrightarrow t=\frac{k\pi}{2}\overset{t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow}t=0\Leftrightarrow x=0$$

Chú ý: Ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ quan tâm tới các ví dụ với 2 biến số.

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$u=2x+3\sqrt{3}\,y+2,$$

với $4x^2+9y^2=16$.

Giải

Từ giả thiết ta được :

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{3y}{4}\right)^2=1$$

đặt $\frac{x}{2}=\cos\alpha$ & $\frac{3y}{4}=\sin\alpha$, $\alpha\in[0, 2\pi)$.

Khi đó hàm số được chuyển về dạng:

$$u=4\cos\alpha+4\sqrt{3}\sin\alpha+2=8(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha)+2=8\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})+2$$

Vì $-1\le\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})\le1$ nên :

- $u_{Min}=-8+2=-6$, đạt được khi :

$$\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=-1\Leftrightarrow\alpha+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow\alpha=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

$$\overset{\alpha\in[0,2\pi)}{\Leftrightarrow}\alpha=\frac{4\pi}{3}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\ \&\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- $y_{Max}=8+2=10$, đạt được khi :

$$\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=1\Leftrightarrow\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$\overset{\alpha\in[0,2\pi)}{\Leftrightarrow}\alpha=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ \&\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Nhận xét: Trong trường hợp không có điều kiện của ẩn số, phép lượng giác hoá thường được xác định theo hai hướng sau:

Hướng 1: Nếu có thể sử dụng được một ẩn phụ $t=g(x, y)$ để chuyển hàm số ban đầu về hàm một ẩn theo t, khi đó tuỳ thuộc vào miền giá trị của hàm số $g(x, y)$ ta lựa chọn phép đặt ẩn phụ $g(x, y)=\sin\alpha$ hoặc $g(x, y)=\mathrm{tg}\alpha$.

Hướng 2: Trong trường hợp còn lại phép lượng giác hoá thường được sử dụng là $x=\mathrm{tg}\alpha$ & $y=\mathrm{tg}\beta$, $\alpha, \beta\in(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ta đi xem xét các ví dụ sau:

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$u=\frac{4xy-4y^2}{x^2+y^2}.$$

Giải

Ta xét hai trường hợp:

- Với $y=0$, ta được:

  $u=0$.

- Với $y\neq0$, chia tử số và mẫu số cho $y^2\neq0$, ta được:

$$f(x, y)=\frac{\frac{4x}{y}-4}{\frac{x^2}{y^2}+1}.$$

Đặt $\frac{x}{y}=\mathrm{tg}t$, $t\in(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Khi đó hàm số được chuyển về dạng:

$$u=\frac{4\mathrm{tg}t-4}{\mathrm{tg}^2t+1}=\frac{\frac{4\sin t}{\cos t}-4}{\frac{1}{\cos^2 t}}=4\sin tt.\cos t-4\cos^2t$$

$$=2\sin2t-2(1+\cos2t)=2\sqrt{2}\sin(2t-\frac{\pi}{4})-2.$$

Vì $-1\le\sin(2t-\frac{\pi}{4})\le1$ nên:

- $u_{Min}=-2\sqrt{2}-2$, đạt được khi

$$\sin(2t-\frac{\pi}{4})=-1 \Leftrightarrow 2t-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow t=-\frac{\pi}{8}+k\pi \overset{t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow} t=-\frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\mathrm{tg}(-\frac{\pi}{8}).$$

- $u_{Max}=2\sqrt{2}-2$, đạt được khi

$$\sin(2t-\frac{\pi}{4})=1 \Leftrightarrow 2t-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{3\pi}{8}+k\pi \overset{t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow} t=\frac{3\pi}{8} \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{8}).$$

III.CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$u=x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}$$

với $x^2+y^2=1$.

BÀI GIẢI

Vì $x^2+y^2=1$, đặt $x=\cos\alpha$ & $y=\sin\alpha$, $\alpha\in[0, 2\pi)$.

Khi đó hàm số được chuyển về dạng:

$$u=\cos\alpha\sqrt{1+\sin\alpha}+\sin\alpha\sqrt{1+\cos\alpha}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta được:

$$u^2\le(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(2+\cos\alpha+\sin\alpha)=2+\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\le2+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow u\le\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Vậy $u_{Max}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, đạt được khi:

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sin\alpha}\\ \sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=1\end{cases} \Leftrightarrow \sin\alpha=\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$u=\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

BÀI GIẢI

Đặt $x=\mathrm{tg}\alpha$ & $y=\mathrm{tg}\beta$, $\alpha, \beta\in(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Khi đó hàm số được chuyển về dạng:

$$u=\frac{(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)(1-\mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}\beta)}{(1+\mathrm{tg}^2\alpha)(1+\mathrm{tg}^2\beta)}=\frac{\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}.\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}.\frac{1}{\cos^2\beta}}=\frac{1}{2}\sin2(\alpha+\beta).$$

DIỄN ĐÀN TOÁN - LÍ - HOÁ CẤP 2+3 ĐỊA CHỈ: 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

Vì $-1\le\sin2(\alpha+\beta)\le1$ nên:

- $u_{Min}=-\frac{1}{2}$, đạt được khi

$$\sin2(\alpha+\beta)=-1\Leftrightarrow2(\alpha+\beta)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow\alpha+\beta=-\frac{\pi}{4}+k\pi$$

$$\overset{\alpha,\beta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow}\alpha+\beta=-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow tg(\alpha+\beta)=tg(-\frac{\pi}{4})\Leftrightarrow\frac{x+y}{1-xy}=-1.$$

- $u_{Max}=\frac{1}{2}$, đạt được khi

$$\sin2(\alpha+\beta)=1\Leftrightarrow2(\alpha+\beta)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

$$\overset{\alpha,\beta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow}\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow tg(\alpha+\beta)=tg\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{x+y}{1-xy}=1.$$

IV.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a. $y=\frac{x^2}{1+x^4}$.

b. $y=\frac{1+x^6}{(1+x^2)^2}$.

c. $y=\frac{1+x^6}{(1+x^2)^3}$.

Bài tập 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y=(1+x^2)^n+(1-x^2)^n$$

với $x\in[-1, 1]$ và $n\ge1$.

Bài tập 3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$u=x+3y-2,$$

với $x^2+9y^2=4$.

Bài tập 4. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$u=\frac{(x^2-y^2)(1-x^2y^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}.$$

CHƯƠNG III
PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HOÁ TÍNH TÍCH PHÂN

I. PHƯƠNG PHÁP

Phương pháp lượng giác hoá để tính tích phân với mục đích thay đổi hình thức của bài toán tính tích phân đại số thành việc tính tích phân lượng giác.

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lựa chọn phép lượng giác hoá rồi thực hiện phép đổi cận.
Bước 2: Tính tích phân nhận được.

Chú ý: Các em học sinh cần ôn lại các phương pháp tính tích phân các hàm số lượng giác, để có thể nhanh chóng tiếp cận được phương pháp này.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tính tích phân:

$$I=\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}.$$

Giải

Đặt $x=tgt$, với $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\Rightarrow dx=\frac{dt}{\cos^2t}=(1+tg^2t).dt$

Đổi cận:
- Với $x=0$ thì $t=0$,
- Với $x=1$ thì $u=\frac{\pi}{4}$

Khi đó:

$$I=\int_0^{\pi/4}\frac{(1+tg^2t).dt}{tg^2t+1}=\int_0^{\pi/4}dt=t\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}.$$

Ví dụ 2: Tính tích phân:

$$I=\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Giải

Đặt $x=\sin t$, với $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\Rightarrow dx=\cos t.dt$.

Đổi cận:
- Với $x=0$ thì $t=0$,
- Với $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $t=\frac{\pi}{4}$

Khi đó:

$$I=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos t.dt}{\cos t}=\int_0^{\pi/4}dt=t\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}.$$

Ví dụ 3: Tính tích phân:

$$I=\int_{2/\sqrt{3}}^{2}\sqrt{x^2-1}.dx\,.$$

Giải

Đặt $x=\frac{1}{\sin t}$, với $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\Rightarrow dx=-\frac{\cos t.dt}{\sin^2 t}$.

Đổi cận:

- Với $x=\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sin t}\Leftrightarrow \sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$.
- Với $x=2\Rightarrow 2=\frac{1}{\sin t}\Leftrightarrow \sin t=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

Khi đó:

$$I=-\int_{\pi/3}^{\pi/6}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}.\frac{\cos t.dt}{\sin^2 t}=-\int_{\pi/3}^{\pi/6}\frac{\cos^2 t.dt}{\sin^3 t}=-\int_{\pi/3}^{\pi/6}\frac{\cos t.\cos t.dt}{\sin^3 t}.$$

Đặt:

$$\begin{cases}u=\cos t\\ dv=\frac{\cos t.dt}{\sin^3 t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\sin t.dt\\ v=-\frac{1}{2\sin^2 t}\end{cases}.$$

Khi đó:

$$I=\frac{\cos x}{2\sin^2 x}\Big|_{\pi/3}^{\pi/6}+\int_{\pi/3}^{\pi/6}\frac{dx}{2\sin x}=-\sqrt{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/6}\frac{\sin t.dt}{\sin^2 t}$$

$$=-\sqrt{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/6}\frac{d(\cos t)}{\cos^2 t-1}=\sqrt{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right|\Big|_{\pi/3}^{\pi/6}$$

$$=\sqrt{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}(\ln\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}-\ln\frac{1}{3})=\sqrt{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ln\frac{3(2-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 4: Tính tích phân:

$$I=\int_{0}^{1}\sqrt{x^2+1}.dx$$

Giải

Đặt $x=tgt$, $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\Rightarrow dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$.

Đổi cận:

- Với x=0 thì t=0,
- Với x=1 thì $t=\frac{\pi}{4}$

Khi đó:

$$I=\int_{0}^{\pi/4}\frac{dt}{\cos^3 t}=\int_{0}^{\pi/4}\frac{\cos tdt}{\cos^4 t}=\int_{0}^{\pi/4}\frac{\cos tdt}{(1-\sin^2 t)^2}.$$

Đặt $u=\sin t\Rightarrow du=\cos t.dt$.

Đổi cận:

- Với t=0 thì u=0.
- Với $t=\frac{\pi}{4}$ thì $u=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó:

$$I=\int_{0}^{\pi/4}\frac{du}{(u+1)^2(u-1)^2}=\frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|-\frac{2u}{(u+1)(u-1)}\right]_{0}^{\sqrt{2}/2}=\frac{1}{2}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$$

Ví dụ 5: Tính tích phân:

$$I=\int_{-a}^{0}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx\,,\ (a>0)$$

Giải

Đặt $x=a.\cos 2t$, với $t\in[0,\frac{\pi}{2}]\Rightarrow dx=-2a.\sin 2t.dt$

Đổi cận:

- Với $x=-a\Rightarrow t=\pi/2$.
- Với $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I=\int_{\pi/2}^{\pi/4}\sqrt{\frac{a+a.\cos 2t}{a-a.\cos 2t}}(-2a.\sin 2t.dt)=2a\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cot gt.\sin 2t.dt$$

$$=2a\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2 t.dt=2a\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt=2a\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=a\left(\frac{\pi}{2}+1\right).$$

Ví dụ 6: Tính tích phân:

$$I=\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}}\sqrt{(x-a)(b-x)}dx\ \text{ với } 0<a<b$$

Giải

Đặt $x=a+(b-a)\sin^2 t$, với $t\in[0,\frac{\pi}{2}]\Rightarrow dx=(b-a).\sin 2tdt$.

Đổi cận:

- Với $x=\frac{3a+b}{4}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.
- Với $x=\frac{a+b}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$I=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{(b-a)^2}{4}\sin^2 2tdt=\frac{(b-a)^2}{8}\int_{\pi/6}^{\pi/4}(1-\cos 4t)dt$$

$$=\frac{(b-a)^2}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}=\frac{(b-a)^2}{8}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right).$$

Ví dụ 7: Tính tích phân:

$$I_n=\int_0^1 (1-x^2)^n dx \text{ với } n \in Z^*.$$

a. (ĐH TCKT TPHCM - 95): Thiết lập hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n-1}.

b. Tính I_n.

Giải

a. Vì $x\in[0, 1]$, đặt $x=\sin t$ với $0\le t\le \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx=\cos t dt$.

Đổi cận:

- Với $x=0 \Rightarrow t=0$.
- Với $x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

Khi đó:

$$I_n=\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)^n \cos t.dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t.\cos t.dt ..$$

Đặt:

$$\begin{cases} u=\cos^{2n} t \\ dv=\cos t dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du=-2n\cos^{2n-1} t.\sin t.dt \\ v=\sin t \end{cases}$$

Khi đó:

$$I_n=\sin t.\cos^{2n}t\Big|_0^{\pi/2} +2n\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} t.\sin^2 t dt =2n\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} t.(1-\cos^2 t)dt$$

$$=2n\Big[\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} t.\cos t.dt - \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \cos t dt\Big]=2n(I_{n-1} -I_n)$$

$$\Leftrightarrow I_n=\frac{2n}{2n+1}.I_{n-1}. \qquad (1)$$

b. Từ (1) ta được:

$$I_n=\frac{2n}{2n+1}.\frac{2(n-1)}{2n-1}.....\frac{2}{3}I_0=\frac{2^n.n!}{3.5...(2n+1)}.\int_0^1 dx=\frac{2^n.n!}{3.5...(2n+1)}.$$

Ví dụ 8: Tính tích phân:

$$I=\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(-4+5x-x^2)^3}}.$$

Giải

Viết lại I dưới dạng:

$$I=\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{[(x-1)(4-x)]^3}}$$

Ta đi xác định nguyên hàm của hàm số

$$f(x)=\frac{dx}{\sqrt{[(x-a)(b-x)]^3}}, \text{ với } a<b.$$

Đặt $x=a+(b-a)\sin^2 t$, với $0\le<t\le\frac{\pi}{2} \Rightarrow dx=2(b-a)\sin t.\cos t.dt=(b-a)\sin 2t.dt$

Khi đó:

$$F(x)=\int\frac{(b-a)\sin 2t.dt}{\sqrt{[(b-a)\sin^2 t.(b-a)\cos^2 t]^3}}=\frac{1}{(b-a)^2}\int\frac{dt}{\sin^2 2t}$$

$$=-\frac{\cot g2t}{(b-a)^2}+C=-\frac{a+b-2x}{2\sqrt{(x-a)(b-x)}}+C.$$

Từ đó:

$$I=F(x)\Big|_2^3=\frac{1+4-2x}{2\sqrt{(x-1)(4-x)}}\Big|_2^3=\frac{5-2x}{2\sqrt{(x-1)(4-x)}}\Big|_2^3=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Chú ý: Trong lời giải trên sở dĩ chúng ta lựa chọn hướng tìm nguyên hàm là bởi phép đổi cận bị lẻ.

Ví dụ 9: Tính tích phân:

$$I=\int_0^1\frac{\sqrt{1-x}dx}{\sqrt{(1+x)^5}}.$$

Giải

Viết lại I dưới dạng:

$$I=\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{(1+x)^2}$$

Đặt $x=\cos 2t$, với $t\in[0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow dx=-2\sin 2t.dt$.

Đổi cận:

- Với $x=0$ thì $t=\frac{\pi}{4}$.
- Với $x=1$ thì $t=0$.

Khi đó:

$$I=-2\int_{\pi/4}^0\sqrt{\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}}\frac{\sin 2t dt}{(1+\cos 2t)^2}=\int_0^{\pi/4}\frac{tg^2 t dt}{\cos^2 t}$$

$$=\int_0^{\pi/4} tg^2 t d(tgt)=\frac{1}{3}tg^3 t\Big|_0^{\pi/4}=\frac{1}{3}.$$

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tính các tích phân sau:

a. $I=\int_0^{1/2}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

b. $I=\int_{\sqrt{2}/2}^1\frac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^2}$.

c. $I=\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

d. $I=\int_2^{2/\sqrt{3}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

e. $=\int_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

f. $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{9+3x^2}dx}{x^2}$.

Bài tập 2: Tính các tích phân sau:

a. (ĐHTM - 95): $I=\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$.

b. (ĐHY HN - 98): $I=\int_{-1/2}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

c. (ĐHY HP - 2000): $I=\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx$.

d. (ĐH TCKT - 97): $I=\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

e. (HVQY - 98): $I=\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Bài tập 3: Tính các tích phân sau:

a. $I=\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x}-1}$.

b. $I=\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Bài tập 4: Tính các tích phân:

a. $I=\int_0^1 \frac{(1+x^4)dx}{1+x^6}$.

b. (ĐHMĐC - 95/ Đề 85): $I=\int_0^1 \frac{dx}{x^4+4x^2+3}$.

CHƯƠNG IV

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HOÁ GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

CHỦ ĐỀ 1

GIẢI MỘT SỐ DẠNG TOÁN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Đường tròn (C) có phương trình chính tắc:

$$(C): (x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Ta viết lại phương trình của (C) dưới dạng:

$$\left(\frac{x-a}{R}\right)^2+\left(\frac{y-b}{R}\right)^2=1$$

do đó tồn tại góc t∈[0, 2π) thoả mãn:

$$\begin{cases}\frac{x-a}{R}=\sin t\\ \frac{y-b}{R}=\cos t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=a+R\sin t\\ y=b+R\cos t\end{cases}, t\in[0, 2\pi). \quad (1)$$

Phương trình (1) được gọi là phương trình tham số dạng lượng giác của đường tròn (C).

Từ đó:

a. Với đường tròn:

$$(C_1): x^2+y^2=1.$$

ta được:

$$\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos t\end{cases}, t\in[0, 2\pi).$$

Đó chính là phương trình tham số của đường tròn đơn vị (C).

b. Với đường tròn:

$$(C_2): x^2+y^2=4.$$

ta được:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{2}=\sin t\\ \frac{y}{2}=\cos t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\sin t\\ y=2\cos t\end{cases}, t\in[0, 2\pi).$$

Đó chính là phương trình tham số của đường tròn (C_2).

c. Với đường tròn:

$$(C_3): (x-1)^2+(y-2)^2=9.$$

ta được:

$$\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+\left(\frac{y-2}{3}\right)^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x-1}{3}=\sin t\\ \frac{y-2}{3}=\cos t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1+3\sin t\\ y=2+3\cos t\end{cases}, t\in[0, 2\pi).$$

Đó chính là phương trình tham số của đường tròn (C_3).

d. Với đường tròn:

$$(C_4): x^2+y^2+2x-6x-6=0.$$

ta được:

$$(x+1)^2+(y-3)^2=16 \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{4}\right)^2+\left(\frac{y-3}{4}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x+1}{4}=\sin t\\ \frac{y-3}{4}=\cos t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1+4\sin t\\ y=3+4\cos t\end{cases}, t\in[0, 2\pi).$$

Đó chính là phương trình tham số của đường tròn (C_4).

II.VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho đường tròn (C) có phương trình

$$(C): x^2+y^2-4x-6y+5=0.$$

Tìm các điểm có toạ độ nguyên thuộc (C).

Giải

Chuyển phương trình đường tròn về dạng tham số:

$$(C): \begin{cases}x=2+2\sqrt{2}\sin t\\ y=3+2\sqrt{2}\cos t\end{cases}, t\in[0, 2\pi).$$

Khi đó điểm M∈(C) ⇒ M($2+2\sqrt{2}$ sint, $3+2\sqrt{2}$ cost)

Suy ra các giá trị góc t để x, y đều nguyên là:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$$

Ta được $M_1(0, 1)$, $M_2(0, 5)$, $M_3(4, 1)$, $M_4(4, 5)$.

Ví dụ 2: Cho đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): (x-1)^2+(y-2)^2=9$$

Cho ΔABC đều nội tiếp trong đường tròn (C). Xác định toạ độ các đỉnh B C, biết điểm A(-2, 2).

Giải

Chuyển phương trình đường tròn về dạng tham số:

$$(C): \begin{cases}x=1+3\sin t\\ y=2+3\cos t\end{cases}, t\in[0, 2\pi).$$

Khi đó điểm M∈(C) ⇒ M(1+3sint, 2+3cost).

Giả sử AB=a, ta được:

$$R=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a=R\sqrt{3}=3\sqrt{3}.$$

Bài toán trở thành "Tìm điểm M∈(C) sao cho AM=$3\sqrt{3}$", tức là:

$$AM^2=27 \Leftrightarrow (3+3\sin t)^2+9\cos^2 t=27$$

$$\Leftrightarrow \sin t=\frac{1}{2} \xrightarrow{\sin^2 t+\cos^2 t=1} \left[\begin{array}{l}\cos t=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}B(\frac{5}{2}, 2-\frac{3\sqrt{3}}{2})\\ C(\frac{5}{2}, 2+\frac{3\sqrt{3}}{2})\end{cases}$$

Ví dụ 3: Cho điểm A(0, 1) và đường tròn (C) có phương trình

$$(C): x^2+y^2-4x-6y+11=0$$

a. Lập phương trình tham số của (C).

b. Tìm toạ độ điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho khoảng cách MA đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải

a. Chuyển phương trình đường tròn về dạng tham số:

$$(C): \begin{cases}x=2+\sqrt{2}\sin t\\ y=3+\sqrt{2}\cos t\end{cases}, t\in[0, 2\pi).$$

b. Điểm M∈(C) ⇒ M($2+\sqrt{2}$ sint, $3+\sqrt{2}$ cost).

Khi đó:

$$MA^2=(2+\sqrt{2}\sin t)^2+(2+\sqrt{2}\cos t)^2=10+8.\sin(t+\frac{\pi}{4})$$

Vậy:

- $MA_{Max}=3\sqrt{2}$, đạt được khi $\sin(t+\frac{\pi}{4})=1 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4} \Rightarrow M_1(3, 4)$.
- $MA_{Min}=\sqrt{2}$, đạt được khi $\sin(t+\frac{\pi}{4})=0 \Leftrightarrow t=\frac{3\pi}{4} \Rightarrow M_2(1, 2)$.

Ví dụ 4: Cho đường thẳng (d) và đường tròn (C) có phương trình:

$$(d): 2x-y-5=0,$$

$$(C): x^2+y^2-20x+50=0.$$

CMR (d)∩(C)=|A, B| và hãy chỉ ra toạ độ của A và B.

Giải

Chuyển phương trình đường tròn về dạng tham số:

$$(C): \begin{cases}x=10+5\sqrt{2}\sin t\\ y=5\sqrt{2}\cos t\end{cases}, t\in[0, 2\pi). \qquad (1)$$

Thay (1) vào phương trình của (d), ta được:

$$2(10+5\sqrt{2}\,\text{sint}) - 5\sqrt{2}\,\text{cost} - 5 = 0$$

$$\xrightarrow{\sin^2 t+\cos^2 t=1} \left[\begin{array}{l} \cos t = \dfrac{1}{5\sqrt{2}} \ \& \ \sin t = -\dfrac{7}{5\sqrt{2}} \\ \cos t = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ \& \ \sin t = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(3.1) \\ B(5.5) \end{array}\right.$$

Vậy (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A(3,1) và B(5, 5).

Ví dụ 5: Cho điểm đường thẳng (Δ) và đường tròn (C) có phương trình:

(Δ): $x-y-2=0$,

(C): $x^2+y^2-4x-6y+11=0$

Tìm toạ độ điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho khoảng cách từ M đến (Δ) đạt giā trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải

Chuyển phương trình đường tròn về dạng tham số:

$$(C): \begin{cases} x = 2+\sqrt{2}\sin t \\ y = 3+\sqrt{2}\cos t \end{cases}, \ t\in[0, 2\pi).$$

Khi đó điểm $M\in(C) \Rightarrow M(2+\sqrt{2}\,\text{sint}, 3+\sqrt{2}\,\text{cost})$

Ta có:

$$d=d(M, (\Delta))=\frac{|2+\sqrt{2}\sin t-3-\sqrt{2}\cos t-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|2\sin(t+\frac{\pi}{4})-3|}{\sqrt{2}}$$

Vậy:

- $d_{Min}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, đạt được khi $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=1 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4} \Rightarrow M_1(3, 2)$.
- $d_{Max}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, đạt được khi $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=-1 \Leftrightarrow t=\frac{5\pi}{4} \Rightarrow M_2(1, 4)$.

Ví dụ 6: (ĐHNT/A-97): Cho điểm A(3, 5) và đường tròn (C) có phương trình:

(C): $x^2+y^2+2x-4y-4=0$.

a. Hãy tìm phương trình các tiếp tuyến kẻ từ A đến (C).
b. Giả sử các tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại M, N. Hãy tính độ dài MN.

Giải

a. Họ tiếp tuyến (d_t) của (C) có dạng:

(d_t): $(x-1)\text{sint} + (y-2)\text{cost}=3$. (1)

Điểm $A(3, 5)\in(C)$

$\Leftrightarrow 2\text{sint} + 3\text{cost}=3 \Leftrightarrow \text{sint}=\dfrac{3-3\cos t}{2}$ (2)

$$\xrightarrow{\sin^2 t+\cos^2 t=1} \begin{cases} \sin t = \dfrac{3-3\cos t}{2} \\ 13\cos^2 t-18\cos t+5=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = \dfrac{3-3\cos t}{2} \\ \left[\begin{array}{l} \cos t = 1 \\ \cos t = \dfrac{5}{13} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = 1 \ \& \ \sin t = 0 \\ \cos t = \dfrac{5}{13} \ \& \ \sin t = \dfrac{7}{13} \end{array}\right.$$

- Với cost=1 & sint=0, thay vào (1) ta được

  (d_1): $y-5=0$ và toạ độ tiếp điểm là M(-1, 5).

- Với $\text{cost}=\dfrac{5}{13}$ & $\text{sint}=\dfrac{7}{13}$, thay vào (1) ta được

  (d_2): $24x-7y-37=0$ và toạ độ tiếp điểm là $N(\dfrac{47}{25}, \dfrac{29}{25})$.

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tới đường tròn (C) thoả mãn đầu bài.

b. Độ dài đoạn MN được cho bởi:

$$MN^2=(\frac{47}{25}+1)^2+(\frac{29}{25}-5)^2=\frac{14400}{625} \Leftrightarrow MN=\frac{24}{5}.$$

Ví dụ 7: Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) có phương trình:

(C_1) : $x^2+y^2=4$ và (C_2): $x^2+y^2=16$.

a. CMR từ $M\in(C_2)$ luôn kẻ được hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (C_1), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm và giả sử hai tiếp tuyến này cắt (C_2) tại E_1, E_2.
b. Lập phương trình đường thẳng (T_1T_2). CMR đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.
c. CMR đường thẳng E_1E_2 luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Giải

a. Chuyển phương trình (C_2) về dạng tham số:

$$(C_2): \begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 4\cos t \end{cases}, \ t\in[0, 2\pi).$$

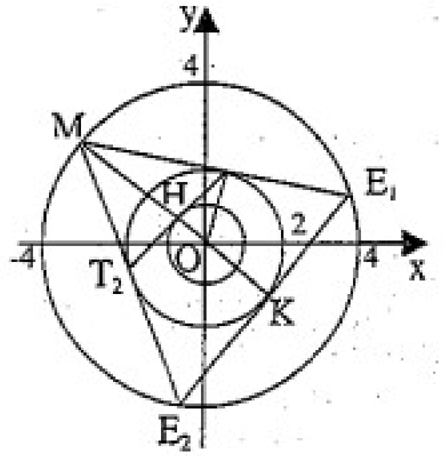
Điểm $M\in(C_2) \Rightarrow M(4\text{sint}, 4\text{cost})$

Ta có:

$$P_{M/(C_1)}=(4\text{sint})^2+(4\text{cost})^2-4=12>0$$

$\Leftrightarrow$ M nằm ngoài (C_1)

Vậy qua $M\in(C_2)$ luôn kẻ được hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (C_1).



b. Gọi toạ độ của tiếp điểm $T(x_1, y_1)$, ta có:

- Tiếp tuyến với đường tròn (C_1) tại $T(x_1, y_1)$ có dạng:

  $x.x_1+y.y_1=4$.

- Tiếp tuyến trên đi qua điểm M, ta được :

  $4x_1\text{sint}+4y_1\text{cost}=4 \Leftrightarrow x_1\text{sint}+y_1\text{cost}=1$. (1)

Nhận thấy toạ độ T_1, T_2 đều thoả mãn (1), vậy phương trình đường thẳng (T_1T_2) có dạng:

(T_1T_2): $x\text{sint}+y\text{cost}=1$.

Gọi N(x, y) là điểm mà (T_1T_2) không đi qua với mọi t, khi đó

$x\sin t + y\cos t = 1$, vô nghiệm t $\Leftrightarrow x^2+y^2<1$.

Ta đi chứng minh (T_1T_2) luôn tiếp xúc với đường tròn (C): $x^2+y^2=1$.

Thật vậy :

$$d(O, T_1T_2)=\frac{|1|}{\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}}=1.$$

Vậy (T_1T_2) luôn tiếp xúc với (C): $x^2+y^2=1$.

c. Gọi K là hình chiếu vuông góc của O lên (E_1E_2), ta được:

OK=HK-OH=HM-OH=OM-2OH=4-2.1=2.

Vậy (E_1E_2) luôn tiếp xúc với đường tròn (C'): $x^2+y^2=4$.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho đường tròn (C) có phương trình:

(C): $x^2+y^2+6x-8y-1=0$.

1. Tìm các điểm $M(x_1, y_1)$ thuộc đường tròn (C) có toạ độ nguyên.
2. Tìm các điểm $N(x_2, y_2)$ thuộc đường tròn (C) sao cho
   a. Tổng x_2+y_2 đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.
   b. Tổng $x_2^2+y_2^2$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài tập 2: Cho đường tròn (C) có phương trình:

(C): $(x-3)^2+(y-4)^2=8$

Cho ΔABC đều nội tiếp trong đường tròn (C). Xác định toạ độ các đỉnh B, C, biết điểm A(1, 2).

Bài tập 3: Cho điểm F(4, -2) và đường tròn (C) có phương trình:

(C): $(x-3)^2+(y-2)^2=5$

Tìm trên (C) điểm E sao cho ΔOEF vuông tại E.

Bài tập 4: Cho đường tròn (C) có phương trình:

(C) : $(x-2)^2+(y-3)^2=1$.

a. Xác định phương trình tham số của (C).

b. Tìm trên (C) điểm N sao cho NB=$\sqrt{5}$ biết rằng B(1, 5).

Bài tập 5: Tìm toạ độ điểm M thuộc đường tròn (C): $x^2+y^2-2x-8y+12=0$ sao cho khoảng cách MA đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất , biết:

a. A(-5, 1).

b. A(-1, 5).

Bài tập 6: Cho đường thẳng (d) và đường tròn (C) có phương trình:

(d): $x+y-1=0$,

(C): $x^2+y^2-1=0$.

a. Chứng tỏ rằng (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

b. Lập phương trình đường tròn (S) đi qua hai điểm A, B và có tâm thuộc đường thẳng (Δ): $2x-y-2=0$.

Bài tập 7: Cho đường thẳng (d) và đường tròn (C) có phương trình:

(d): $x-7y+10=0$,

(C): $x^2+y^2-2x+4y-20=0$.

a. Chứng tỏ rằng (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

b. Lập phương trình đường tròn (S) đi qua A, B và đi qua điểm C(1, -2).

Bài tập 8: Cho đường tròn (C) và đường thẳng (Δ) có phương trình:

(C) : $(x-2)^2+(y-3)^2=2$.

(Δ): $x-y-2=0$.

Tìm toạ độ điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho khoảng cách từ M đến (Δ) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài tập 9: Tìm toạ độ điểm M thuộc đường tròn

(C): $x^2+y^2+6x-8y-1=0$

sao cho khoảng cách từ M đến (Δ) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất. Biết:

a. (Δ): $x-5y-6=0$.

b. (Δ): $5x+y-22=0$.

Bài tập 10: Cho đường tròn (C) có phương trình:

(C): $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) đi qua điểm A(3, 2). Tìm toạ độ tiếp điểm.

Bài tập 11: Cho đường tròn (C) có phương trình:

(C): $x^2+y^2-2x-8y-8=0$.

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) đi qua điểm A(-4, -6). Tìm toạ độ tiếp điểm.

Bài tập 12: Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) có phương trình:

(C_1): $(x-1)^2+(y-1)^2=1$,

(C_2): $(x-2)^2+(y+1)^2=4$.

Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn trên.

Bài tập 13: (ĐHD - 2000): Cho hai đường tròn (C) và (C_m) có phương trình:

(C): $x^2+y^2=1$,

(C_m): $x^2+y^2-2(m+1)x+4my=5$.

a. CMR có 2 đường tròn (C_{m1}), (C_{m2}) tiếp xúc với đường tròn (C) ứng với 2 giá trị m_1, m_2 của m.

b. Xác định phương trình đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn (C_{m1}), (C_{m2}).

Bài tập 14: Cho Hypebol (H) và đường tròn (C) có phương trình:

$$(H) : \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1,$$

(C): $(x+2)^2+y^2=4$.

Lập phương trình tiếp tuyến chung của (H) và (C).

Bài tập 15: Cho đường tròn (C) và Parabol (P) có phương trình:

(C): $(x+2)^2+y^2=4$,

(P): $y^2=12x$.

Lập phương trình tiếp tuyến chung của (C) và (P).

Bài tập 16: Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) có phương trình :

$$(C_1): x^2+y^2=R_1^2 \ \& \ (C_2): x^2+y^2=R_2^2 \text{ với } R_2>R_1.$$

Từ điểm $M\in(C_2)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (C_1), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm.

a. Viết phương trình đường thẳng T_1T_2. theo toạ độ của M.

b. CMR khi M thay đổi trên (C_2) các đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định.

Bài tập 17: Cho đường tròn (C) và Elíp (E) có phương trình :

$$(C): (x-1)^2+(y-1)^2=9,$$

$$(E): \frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{1}=1.$$

Từ $M\in(C)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (E), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm CMR đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Elíp cố định.

Bài tập 18: Cho đường tròn (C) và Elíp (E) có phương trình :

$$(C): x^2+y^2=R^2,$$

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ với } 0<b<a\le R.$$

Từ điểm $M\in(C)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (E), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm.

a. Viết phương trình đường thẳng T_1T_2. theo toạ độ của M.

b. CMR khi đó các đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Elíp cố định.

Bài tập 19: Cho đường tròn (C) và Hypebol (H) có phương trình:

$$(C): x^2+y^2=R^2,\ (H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ với } 0<R\le a.$$

Từ điểm $M\in(C)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (H), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm.

a. Viết phương trình đường thẳng T_1T_2. theo toạ độ của M.

b. CMR khi đó các đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Elíp cố định.

c. Áp dụng với:

$$(C): x^2+y^2=1 \ \& \ (H): \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Bài tập 20: Cho đường tròn (C) và Parabol (P) có phương trình :

$$(C): (x-a)^2+y^2=R^2,$$

$$(P): y^2=2px \text{ với } 0<p \ \& \ a+R<0.$$

Điểm $M\in(C)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (P), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm.

a. Viết phương trình đường thẳng T_1T_2 theo toạ độ của M.

b. CMR khi đó các đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Hypebol cố định.

c. Áp dụng với:

$$(C): (x+2)^2+y^2=1 \ \& \ (P): y^2=2x.$$

CHỦ ĐỀ 2
GIẢI MỘT SỐ DẠNG TOÁN CỦA ELÍP

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Elíp (E) có phương trình chính tắc:

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ta viết lại phương trình của (E) dưới dạng:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

do đó tồn tại góc $t\in[0, 2\pi)$ thoả mãn:

$$\begin{cases}\frac{x}{a}=\sin t\\ \frac{y}{b}=\cos t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=a\sin t\\ y=b\cos t\end{cases},\ t\in[0, 2\pi). \qquad (1)$$

Phương trình (1) được gọi là phương trình tham số dạng lượng giác của Elíp (E).

Từ đó:

a. Với Elíp:

$$(E_1): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1.$$

ta được:

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{5}=\sin t\\ \frac{y}{2}=\cos t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\sin t\\ y=2\cos t\end{cases},\ t\in[0, 2\pi).$$

Đó chính là phương trình tham số của Elíp (E_1).

b. Với Elíp:

$$(E_2): 9x^2+4y^2=36.$$

ta được:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{2}=\sin t\\ \frac{y}{3}=\cos t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\sin t\\ y=3\cos t\end{cases},\ t\in[0, 2\pi).$$

Đó chính là phương trình tham số của Elíp (E_2).

c. Với Elíp:

$$(E_3):\ \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{16}=1.$$

ta được:

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+\left(\frac{y-2}{4}\right)^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x+1}{2}=\sin t\\ \frac{y-1}{4}=\cos t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1+2\sin t\\ y=1+4\cos t\end{cases},\ t\in[0,\ 2\pi).$$

Đó chính là phương trình tham số của Elíp (E_3).

d. Với Elíp:

$$(E_4):\ x^2+2y^2-2x-8y+1=0.$$

ta được:

$$(x-1)^2+2(y-2)^2=8 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(y-2)^2}{4}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y-2}{2}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x-1}{2\sqrt{2}}=\sin t\\ \frac{y-2}{2}=\cos t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1+2\sqrt{2}\sin t\\ y=2+2\cos t\end{cases},\ t\in[0,\ 2\pi).$$

Đó chính là phương trình tham số của Elíp (E_4).

II.VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho Elíp (E) có phương trình :

$$(E):\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1.$$

Tìm các điểm M thuộc Elíp (E) sao cho:

a. Có toạ độ nguyên thuộc (E).

b. Có tổng hai toạ độ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất .

Giải

a. Chuyển phương trình Elíp về dạng tham số:

$$(E):\begin{cases}x=\sqrt{2}\sin t\\ y=2\sqrt{2}\cos t\end{cases},\ t\in[0,\ 2\pi).$$

Khi đó điểm $M\in(E) \Rightarrow M(\sqrt{2}\sin t,\ 2\sqrt{2}\cos t)$

Suy ra các giá trị góc α để x, y đều nguyên là: $\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$.

Ta được: $M_0(1,\ 2)$, $M_1(-1,\ 2)$, $M_2(-1,\ -2)$ và $M_3(1,\ -2)$

b. Điểm $M(x_0,\ y_0)\in(E)$

$$\Rightarrow \begin{cases}x_0=\sqrt{2}\sin t\\ y_0=2\sqrt{2}\cos t\end{cases},\ t\in[0,\ 2\pi).$$

Khi đó:

$$x_0+y_0=\sqrt{2}\sin t+2\sqrt{2}\cos t.$$

Vậy:

- $(x_0+y_0)_{Max}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}$, đạt được khi

$$\sqrt{2}\sin t+2\sqrt{2}\cos t=\sqrt{10} \Leftrightarrow \sin t=\sqrt{5}-2\cos t$$

$$\xrightarrow{\sin^2 t+\cos^2 t=1} \begin{cases}\sin t=\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \cos t=\frac{2}{\sqrt{5}}\end{cases} \Rightarrow M_1\left(\frac{\sqrt{10}}{5},\ \frac{4\sqrt{10}}{5}\right).$$

- $(x_0+y_0)_{Min}=-\sqrt{10}$, đạt được khi

$$\sqrt{2}\sin t+2\sqrt{2}\cos t=-\sqrt{10} \Leftrightarrow \sin t=-\sqrt{5}-2\cos t$$

$$\xrightarrow{\sin^2 t+\cos^2 t=1} \begin{cases}\sin t=-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \cos t=-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{cases} \Rightarrow M_1\left(-\frac{\sqrt{10}}{5},\ -\frac{4\sqrt{10}}{5}\right).$$

Ví dụ 2: Cho điểm A(4, 5) và Elíp (E) có phương trình :

$$(E):\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1.$$

a. Tìm toạ độ điểm M thuộc Elíp (E) sao cho đoạn AM ngắn nhất.

b. Chứng tỏ rằng nếu đoạn AM ngắn nhất, thì AM vuông góc với tiếp tuyến tại M của Elíp.

Giải

a. Chuyển phương trình Elíp về dạng tham số:

$$(E):\begin{cases}x=2\sqrt{2}\sin t\\ y=\sqrt{2}\cos t\end{cases},\ t\in[0,\ 2\pi)$$

suy ra với điểm $M\in(E)$, ta được $M(2\sqrt{2}\sin t,\ \sqrt{2}\cos t)$, do đó:

$$AM^2=(2\sqrt{2}\sin t-4)^2+(\sqrt{2}\cos t-5)^2$$
$$=8\sin^2 t-16\sqrt{2}\sin t+16+2\cos^2 t-10\sqrt{2}\cos t+25$$
$$=8(\sqrt{2}\sin t-1)^2+5(\sqrt{2}\cos t-1)^2+20\geq 20$$

Vậy $AM_{Min}=\sqrt{20}$, đạt được khi

$$\begin{cases}\sqrt{2}\sin t-1=0\\ \sqrt{2}\cos t-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \sin t=\cos t=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow M(2,\ 1).$$

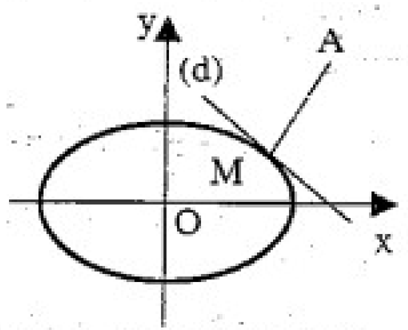
b. Ta có:

- Tiếp tuyến tại M của Elíp (E) có dạng

$$(d):\ \frac{2x}{8}+\frac{y}{2}=1 \Leftrightarrow (d):\ x+2y-4=0.$$

- Đường thẳng AM có hệ số góc

$$k_{AM}=\frac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=2.$$



Nhận xét rằng

$$k_d.\,k_{AM}=-\frac{1}{2}.2=-1 \Leftrightarrow (d)\perp AM.$$

Vậy AM ngắn nhất, thì AM vuông góc với tiếp tuyến tại M của Elíp.

Ví dụ 3: (HVBCVT - 99): Cho Elíp (E) có phương trình :

$$(E):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\text{, với } a>b.$$

Tìm điểm M trên (E) sao cho độ dài F_1M (với $F_1(-c, 0)$) ngắn nhất, dài nhất.

Giải

Chuyển phương trình Elíp về dạng tham số:

$$(E):\begin{cases}x=a.\sin t\\ y=b.\cos t\end{cases},\ t\in[0,\ 2\pi).$$

Điểm M∈(E) ⇒ M(a.sint, b.cost).

Khi đó:

$$F_1M^2=(a.\sin t+c)^2+b^2\cos^2t=a^2\sin^2t+2ac.\sin t+c^2+b^2\cos^2t$$
$$=a^2\sin^2t+2ac.\sin t+a^2-b^2+b^2\cos^2t=a^2\sin^2t+2ac.\sin t+a^2-b^2(1-\cos^2t)$$
$$=(a^2-b^2)\sin^2t+2ac.\sin t+a^2=c^2\sin^2t+2ac.\sin t+a^2=(a+c.\sin t)^2.$$

$\Rightarrow F_1M=a+c.\sin t.$

Vậy:

- $F_1M_{Max}=a+c$, đạt được khi

  $\sin t=1 \Leftrightarrow M\equiv A_2(a,\ 0).$

- $F_1M_{Min}=a-c$, đạt được khi

  $\sin t=-1 \Leftrightarrow M\equiv A_1(-a,\ 0).$

Ví dụ 4: Cho Elíp (E) có phương trình :

$$(E):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Trong Elíp (E) nội tiếp hình chữ nhật với các cạnh song song với các trục. Tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Giải

Chuyển phương trình Elíp về dạng tham số:

$$(E):\begin{cases}x=a.\sin t\\ y=b.\cos t\end{cases},\ t\in[0,\ 2\pi).$$

Điểm M∈(E) và thuộc góc phần tư thứ nhất ⇒ $M(a.\sin t,\ b.\cos t),\ t\in(0, \frac{\pi}{2})$.

Khi đó:

$$S=4x_0y_0=4a.\sin t.b.\cos t=2ab\sin 2t\le 2ab.$$

Vậy $S_{max}=2ab$, đạt được khi:

$$\sin 2t=1 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4} \Rightarrow A(\frac{a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2}).$$

Ví dụ 5: Xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) và Elíp (E) , biết:

a. (d): x-y-3=0 & (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1.$

b. (d): 2x+y-5=0 & (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$

Giải

a. Chuyển phương trình (E) về dạng tham số:

$$(E):\begin{cases}x=2\sin t\\ y=\cos t\end{cases},\ t\in[0,\ 2\pi). \qquad (1)$$

Thay (1) vào phương trình của (d), ta được:

$$2\sin t-\cos t=3 \qquad (*)$$

Vì 4+1<9 ⇔ phương trình (*) vô nghiệm ⇔ (d)∩(E)={∅}.

b. Chuyển phương trình (E) về dạng tham số:

$$(E):\begin{cases}x=2\sin t\\ y=3\cos t\end{cases},\ t\in[0,\ 2\pi). \qquad (1)$$

Thay (1) vào phương trình của (d), ta được:

$$4\sin t+3\cos t=5 \xrightarrow{\sin^2t+\cos^2t=1}\begin{cases}\sin t=\frac{4}{5}\\ \cos t=\frac{3}{5}\end{cases}\Rightarrow M(\frac{8}{5},\frac{9}{5}).$$

Vậy (d) tiếp xúc với (E) tại điểm M.

Ví dụ 6: Cho Elíp (E) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(E):\ \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1,$$

(d): x-y-3=0.

a. CMR (E)∩(d)=∅.

b. Giả sử M∈(E); MH là khoảng cách từ M đến (d). Tìm toạ độ điểm M sao cho độ dài MH nhỏ nhất, lớn nhất.

Giải

a. Chuyển phương trình (E) về dạng tham số:

$$(E):\begin{cases}x=\sin t\\ y=2\cos t\end{cases},\ t\in[0,\ 2\pi). \qquad (1)$$

DIỄN ĐÀN TOÁN - LÝ - HOÁ CẤP 2+3 ĐỊA CHỈ: 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

Thay (1) vào phương trình của (d), ta được:

$$\sin t - 2\cos t = 3 \qquad (*)$$

- Phương trình (*) vô nghiệm vì $A^2+B^2<C^2$, do đó $(d)\cap(E)=\{\varnothing\}$.

b. Điểm $M\in(E) \Rightarrow M(\sin t, 2\cos t)$.

Khi đó:

$$d=d(M, d)=\frac{|\sin t-2\cos t-3|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|2\cos t-\sin t+3|}{\sqrt{5}}.$$

Ta có:

$$-\sqrt{5}\le 2\cos t-\sin t\le\sqrt{5}.$$

Vậy:

- $d_{Max}=\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}}$, đạt được khi:

$$2\cos t-\sin t=\sqrt{5} \Leftrightarrow \sin t=2\cos t-\sqrt{5}$$

$$\xrightarrow{\sin^2 t+\cos^2 t=1}\begin{cases}\sin t=-1/\sqrt{5}\\ \cos t=2/\sqrt{5}\end{cases} \Rightarrow M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

- $d_{Max}=\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$, đạt được khi:

$$2\cos t-\sin t=-\sqrt{5} \Leftrightarrow \sin t=2\cos t+\sqrt{5}$$

$$\xrightarrow{\sin^2 t+\cos^2 t=1}\begin{cases}\sin t=1/\sqrt{5}\\ \cos t=-2/\sqrt{5}\end{cases} \Rightarrow M_2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

Ví dụ 7: (ĐHNT TPHCM - 97): Cho Elíp (E) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1 \text{ và } (d): x-y\sqrt{2}+2=0.$$

a. CMR (d) luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.

b. Tìm toạ độ điểm C thuộc (E) sao cho ΔABC có diện tích lớn nhất.

Giải

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (E):

$$\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\\ x-y\sqrt{2}+2=0\end{cases} \Rightarrow A\left(\sqrt{3}-1, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right), B\left(-\sqrt{3}-1, \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)$$

khi đó $AB=3\sqrt{2}$.

b. Chuyển phương trình Elíp (E) về dạng tham số:

$$(E): \begin{cases}x=2\sqrt{2}\sin t\\ y=2\cos t\end{cases}, t\in[0, 2\pi).$$

Điểm $C\in(E) \Rightarrow C(2\sqrt{2}\sin t, 2\cos t)$ và H là hình chiếu vuông góc của C lên AB. Ta được:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.CH=\frac{3\sqrt{2}}{2}CH.$$

- ΔABC có diện tích lớn nhất ⇔ CH_{Max}.

Ta có:

$$CH=d(C, (d))=\frac{|2\sqrt{2}\sin t-2\sqrt{2}\cos t+2|}{\sqrt{1+2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}|2\sin(t-\frac{\pi}{4})+1|\le 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow CH_{Max}=2\sqrt{3} \Rightarrow S_{Max}=3\sqrt{6},$$

đạt được khi $\sin(t-\frac{\pi}{4})=1 \Leftrightarrow t=\frac{3\pi}{4} \Rightarrow C_0(2, -\sqrt{2})$.

Ví dụ 8: Cho Hypebol (H) và Elíp (E) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{27}=1 \ \& \ (E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Lập phương trình các tiếp tuyến chung của (E) và (H).

Giải

Họ tiếp tuyến (d_t) của (E) có dạng:

$$\frac{x}{2}\sin t+\frac{y}{3}\cos t=1 \Leftrightarrow (d_t): 3x.\sin t+2y.\cos t=6. \qquad (1)$$

Đường thẳng (d_t) tiếp xúc với (H)

$$\Leftrightarrow 8.9\sin^2 t-27.4\cos^2 t=36 \Leftrightarrow 2\sin^2 t-3\cos^2 t=1 \Leftrightarrow 5\sin^2 t=4 \Leftrightarrow \sin t=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

- Với $\sin t=\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos t=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, ta được hai tiếp tuyến:

$$(d_1): 3x+y-3\sqrt{5}=0 \ \& \ (d_2): 3x-y-3\sqrt{5}=0.$$

- Với $\sin t=-\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos t=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, ta được hai tiếp tuyến:

$$(d_3): 3x-y+3\sqrt{5}=0 \ \& \ (d_4): 3x+y+3\sqrt{5}=0.$$

Ví dụ 9: (Đề 34-Va): CMR tích các khoảng cách từ các tiêu điểm tới một tiếp tuyến bất kỳ của một Elíp bằng bình phương độ dài nửa trục nhỏ của Elíp.

Giải

Giả sử Elíp (E) có phương trình

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Chuyển phương trình Elíp (E) về dạng tham số:

$$(E): \begin{cases}x=a\sin t\\ y=b\cos t\end{cases}, t\in[0, 2\pi). \qquad (1)$$

Lấy điểm $M\in(E)$, ta có: $M(a.\sin t, b.\cos t)$. (2)

Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$(d): \frac{x}{a}\sin t+\frac{y}{b}\cos t=1 \Leftrightarrow (d): bx.\sin t+ay.\cos t-ab=0.$$

Khi đó với $F_1(-c, 0)$ và $F_2(c, 0)$, ta có:

$$h_1=d(F_1, d)=\frac{|-bc\sin t-ab|}{\sqrt{b^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}},$$

$$h_2=d(F_2, d)=\frac{|bc\sin t-ab|}{\sqrt{b^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}},$$

suy ra

$$h_1.h_2=\frac{|b^2(c^2\sin^2 t-a^2)|}{b^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}=\frac{|b^2[(a^2-b^2)\sin^2 t-a^2]|}{b^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}$$

$$=\frac{|b^2(b^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t)|}{b^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}=b^2 \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 10: Cho Elíp (E) có phương trình

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ với } 0<b<a$$

Gọi A_1A_2 là trục lớn của Elíp. Dựng các tiếp tuyến A_1t_1, A_2t_2. Một tiếp tuyến đi qua $T\in(E)$ cắt A_1t_1, và A_2t_2 tại M và N.

a. CMR các tiêu điểm F_1, F_2 của (E) nhìn đoạn MN dưới góc vuông.

b. CMR tích $A_1M.A_2N$ không phụ thuộc và T.

Giải

Chuyển phương trình Elíp (E) về dạng tham số:

$$(E): \begin{cases} x=a\sin t \\ y=b\cos t \end{cases}, t\in[0, 2\pi). \quad (1)$$

Lấy điểm $T\in(E)$, ta có: $T(a.\sin t, b.\cos t)$. (2)

Phương trình tiếp tuyến tại T có dạng:

$$(d): \frac{x}{a}\sin t+\frac{y}{b}\cos t=1$$

$$\Leftrightarrow (d): bx.\sin t+ay.\cos t-ab=0.$$

- Toạ độ M là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} bx.\sin t+ay.\cos t-ab=0 \\ x=-a \end{cases} \Rightarrow M\left(-a, \frac{b(1+\sin t)}{\cos t}\right) \text{ \& } A_1M=\left|\frac{b(1+\sin t)}{\cos t}\right|.$$

- Toạ độ N là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} bx.\sin t+ay.\cos t-ab=0 \\ x=a \end{cases} \Rightarrow N\left(-a, \frac{b(1-\sin t)}{\cos t}\right) \text{ \& } A_2N=\left|\frac{b(1-\sin t)}{\cos t}\right|.$$

a. Ta có:

$$\overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_1N}=(-a+c)(a+c)+\frac{b(1+\sin t)}{\cos t}.\frac{b(1-\sin t)}{\cos t}=c^2-a^2+b=0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{F_1M}\perp\overrightarrow{F_1N} \Leftrightarrow F_1 \text{ nhìn MN dưới một góc vuông.}$$

$$\overrightarrow{F_2M}.\overrightarrow{F_2N}=(-a-c)(a-c)+\frac{b(1+\sin t)}{\cos t}.\frac{b(1+\sin t)}{\cos t}=c^2-a^2+b=-b^2+b^2=0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{F_2M}\perp\overrightarrow{F_2N} \Leftrightarrow F_2 \text{ nhìn MN dưới một góc vuông.}$$

b. Ta cũng có:

$$A_1M.A_2N=\left|\frac{b(1+\sin t)}{\cos t}\right|\left|\frac{b(1-\sin t)}{\cos t}\right|=\left|\frac{b^2(1-\sin^2 t)}{\cos^2 t}\right|=b^2.$$

Ví dụ 11: Cho hai Elíp (E_1) và (E_2) có phương trình:

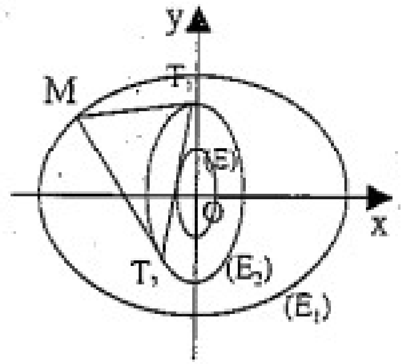
$$(E_1): \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1 \text{ \& } (E_2): \frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1$$

với $\text{Max}\{a_2, b_2\}<\text{Min}\{a_1, b_1\}$.

a. CMR từ $M\in(E_1)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (E_2), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm. Lập phương trình (T_1T_2).

b. CMR đường thẳng (T_1T_2) luôn tiếp xúc với một Elíp cố định.

Giải



Chuyển phương trình Elíp (E_1) về dạng tham số:

$$\begin{cases} x=a_1\sin t \\ y=b_1\cos t \end{cases}, t\in[0, 2\pi).$$

Vì $M\in(E_1) \Rightarrow M(a_1\sin t, b_1\cos t)$.

a. Vì (E_2) nằm trong (E_1) do đó từ $M\in(E_1)$ luônkẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (E_2).

Gọi toạ độ của tiếp điểm $T(x_1, y_1)$, ta có:

- Tiếp tuyến với Elíp (E_2) tại $T(x_1, y_1)$ có dạng:

$$\frac{x.x_1}{a_2^2}+\frac{y.y_1}{b_2^2}=1.$$

- Tiếp tuyến trên đi qua điểm M, ta được :

$$\frac{a_1.x_1\sin t}{a_2^2}+\frac{b_1.y_1\cos t}{b_2^2}=1 \Leftrightarrow a_1b_2^2x_1.\sin t+b_1a_2^2y_1.\cos t=a_2^2.b_2^2. \quad (1)$$

Nhận thấy toạ độ T_1, T_2 đều thoả mãn (1), vậy phương trình đường thẳng (T_1T_2) có dạng:

$$(T_1T_2): a_1b_2^2x.\sin t+b_1a_2^2y.\cos t=a_2^2.b_2^2.$$

b. Gọi $N(x, y)$ là điểm mà (T_1T_2) không đi qua với mọi t, khi đó

$$a_1b_2^2x.\sin t+b_1a_2^2y.\cos t=a_2^2.b_2^2, \text{ vô nghiệm t}$$

$$\Leftrightarrow a_1^2b_2^4x^2+b_1^2a_2^4y^2<a_2^4.b_2^4.$$

DIỄN ĐÀN TOÁN LÝ HÓA CẤP 2+3 ĐỊA CHỈ: 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

Ta chứng minh (T_1T_2) luôn tiếp xúc với Elíp (E): $\frac{x^2}{a_2^4/a_1^2}+\frac{y^2}{b_2^4/b_1^2}=1$.

Thật vậy :

$$(a_1 b_2^2.\sin t)^2.\frac{a_2^4}{a_1^2}+(b_1 a_2^2.\cos t)^2.\frac{b_2^4}{b_1^2}=a_2^4.b_2^4.$$

Vậy (T_1T_2) luôn tiếp xúc với Elíp (E): $\frac{x^2}{a_2^4/a_1^2}+\frac{y^2}{b_2^4/b_1^2}=1$.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho Elíp (E) có phương trình :

$$(E): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1.$$

Tìm các điểm M thuộc Elíp (E) sao cho:

a. Có toạ độ nguyên thuộc (E).

b. Có tổng hai toạ độ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất .

c. Với điểm A(3, 3), tìm toạ độ điểm M thuộc Elíp (E) sao cho đoạn AM ngắn nhất. Chứng tỏ rằng nếu đoạn AM ngắn nhất, thì AM vuông góc với tiếp tuyến tại M của Elíp.

Bài tập 2: Cho Elíp (E) có phương trình :

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Tìm điểm M thuộc (E) sao cho tiếp tuyến với (E) tại M tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích lớn nhất.

Bài tập 3: (ĐHXD-96): Cho Elíp (E) có phương trình :

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.\ 0<b<a.$$

a. Gọi E là một điểm tuỳ ý thuộc (E) chứng tỏ rằng $b\le OE\le a$.

b. A, B là hai điểm tuỳ ý thuộc (E) sao cho OA⊥OB, hãy xác định vị trí của A và B trên (E) để ΔOAB có diện tích lớn nhất, nhỏ nhất. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất đó.

Bài tập 4: (Đề 45-Va): Cho Elíp (E) có phương trình :

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.\ 0<b<a.$$

t là một tiếp tuyến của (E) cắt các đường thẳng x=-a, x=a tại M và N. Xác định tiếp tuyến sao cho ΔFMN có diện tích nhỏ nhất, trong đó F là một trong hai tiêu điểm của (E).

Bài tập 5: Xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) và Elíp (E) trong các trường hợp:

a. (d): 2x+y=0 và (E): $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

b. (d): kx-y+1=0 và (E): $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$.

Bài tập 6: Cho Elíp (E) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1,\ (d): x+y-6=0.$$

a. CMR $(E)\cap(d)=\varnothing$.

b. Giả sử M∈(E); MH là khoảng cách từ M đến (d). Tìm toạ độ điểm M sao cho độ dài MH nhỏ nhất, lớn nhất.

Bài tập 7: Cho Elíp (E) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1,\ (\Delta): 5x-3y+15=0.$$

a. CMR $(E)\cap(d)=\varnothing$.

b. Giả sử M∈(E); MH là khoảng cách từ M đến (d). Tìm toạ độ điểm M sao cho độ dài MH nhỏ nhất, lớn nhất.

Bài tập 8: Cho Elíp (E) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(E): \frac{(x-2)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,$$

(d): 2x-y=0.

a. CMR (d) luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.

b. Tìm toạ độ điểm C thuộc (E) sao cho :
  - ΔABC có diện tích bằng 3.
  - ΔABC có diện tích lớn nhất.
  - ΔABC cân.
  - ΔABC vuông.

Bài tập 9: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$$

Viết phương trình các tiếp tuyến của Elíp (E), biết:

a. Tiếp tuyến đi qua điểm $A(0, 2\sqrt{3})$.

b. Tiếp tuyến song song với đường thẳng (d_1): x+y=0.

c. Tiếp tuyến song song với đường thẳng (d_2): x-y=0.

Bài tập 10: Cho hai Elíp (E_1) và (E_2) có phương trình:

$$(E_1): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\ \ \&\ (E_2): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Xác định phương trình tiếp tuyến chung của hai Elíp trên.

Bài tập 11: Cho Parabol (P) và Elíp (E) có phương trình:

$$(P): y^2=2x\ \&\ (E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Lập phương trình các tiếp tuyến chung của (E) và (P).

Bài tập 12: Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1.$$

DIỄN ĐÀN TOÁN - LÍ - HOÁ CẤP 2+3 ĐỊA CHỈ 1005 TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

Với F_1, F_2 là các tiêu điểm của nó, $M\in(E)$.

a. CMR tiếp tuyến với (E) tại M là đường phân giác ngoài của góc F_1MF_2.

b. Tiếp tuyến tại M của (E) cắt đường chuẩn (Δ_2) tại N. CMR tiêu điểm F_2 nhìn MN dưới một góc vuông.

Bài tập 13: Cho Elíp (E) có phương trình :

$$(E):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\text{, với } 0<a<b$$

Tiếp tuyến tại M của Elíp (E) cắt đường chuẩn (Δ_2) tại N. CMR tiêu điểm F_2 nhìn MN dưới một góc vuông.

Bài tập 14: (Đề 43-Va): Cho Elíp (E) có phương trình:

$$(E):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Cho hai điểm M, N trên một tiếp tuyến của Elíp (E), sao cho mỗi tiêu điểm F_1, F_2 của (E) nhìn đoạn MN dưới góc vuông. Hãy xác định vị trí của M, N trên tiếp tuyến ấy.

Bài tập 15: Cho Elíp (E) có phương trình

$$(E):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\text{, với } 0<a<b$$

Gọi A_1A_2 là trục lớn của Elíp. Dựng các tiếp tuyến A_1t_1, A_2t_2. Một tiếp tuyến đi qua $T\in(E)$ cắt A_1t_1, và A_2t_2 tại M và N.

a. CMR các tiêu điểm F_1, F_2 của (E) nhìn đoạn MN dưới góc vuông.

b. CMR tích $A_1M.A_2N$ không phụ thuộc và T.

Bài tập 16: Cho hai Elíp (E_1) và (E_2) có phương trình:

$$(E_1):\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1 \text{ và } (E_2):\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{8}=1.$$

Từ $M\in(E_1)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (E_2), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm Giả sử MT_1, MT_2 cắt (E_1) tại hai điểm E_1, E_2 khác M.

a. CMR đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Elíp cố định.

b. CMR đường thẳng E_1E_2 luôn tiếp xúc với một Elíp cố định

Bài tập 17: Cho Elíp (E) và đường tròn (C) có phương trình:

$$(E):\ \frac{(x-4)^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1\ \&\ (C):x^2+y^2=1$$

a. CMR từ $M\in(E)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (E), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm. Lập phương trình (T_1T_2).

b. CMR đường thẳng (T_1T_2) luôn tiếp xúc với một Hypebol cố định.

Bài tập 18: Cho đường tròn (C) và Elíp (E) có phương trình :

$$(C):\ x^2+y^2=4,\ (E):\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

Từ $M\in(E)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (C), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm và giả sử MT_1, MT_2 cắt (E) tại E_1, E_2

a. CMR đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Elíp cố định.

b. CMR đường thẳng E_1E_2 luôn tiếp xúc với một Elíp cố định.

CHỦ ĐỀ 3
GIẢI MỘT SỐ DẠNG TOÁN CỦA HYPEBOL

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Ta xét hai dạng phương trình chính tắc của Hypebol.

1. Hypebol (H) có phương trình chính tắc:

$$(H):\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ta viết lại phương trình của (H) dưới dạng:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2=1+\left(\frac{y}{b}\right)^2$$

do đó tồn tại góc $t\in[0,2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\}$ thoả mãn:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{\cos t}\\ \dfrac{y}{b}=\mathrm{tg}t\end{cases}\Leftrightarrow (H):\begin{cases}x=\dfrac{a}{\cos t}\\ y=b\,\mathrm{tg}t\end{cases},\ t\in[0,2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\}.\qquad(1)$$

Phương trình (1) được gọi là phương trình tham số dạng lượng giác của Hypebol (H).

2. Hypebol (H) có phương trình chính tắc:

$$(H):\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

được chuyển về dạng tham số:

$$(H):\begin{cases}x=a\,\mathrm{tg}t\\ y=\dfrac{b}{\cos t}\end{cases},\ t\in[0,2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\}.\qquad(1')$$

Từ đó:

a. Với Hypebol

$$(H_1):\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

ta được:

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2-\left(\frac{y}{3}\right)^2=1\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{4}=\dfrac{1}{\cos t}\\ \dfrac{y}{3}=\mathrm{tg}t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{\cos t}\\ y=3\mathrm{tg}t\end{cases},\ t\in[0,2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\}.$$

Đó chính là phương trình tham số của Hypebol (H_1).

DIỄN ĐÀN TOÁN - LÍ - HÓA - ĐỊA CHỈ: 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP QUY NHƠN

b. Với Hypebol

$$(H_2): 25x^2-4y^2=100$$

ta được:

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{5}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{1}{\cos t} \\ \frac{y}{5}=\text{tgt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{\cos t} \\ y=5\text{tgt} \end{cases},\ t\in[0,2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\}.$$

Đó chính là phương trình tham số của Hypebol (H_2).

II.VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho Hypebol (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1.$$

Tìm các điểm M thuộc Hypebol (H) có tổng bình phương các khoảng cách tới hai tiệm cận đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Hypebol (H) có hai tiệm cận là :

$$(d_{1,2}): y=\pm\frac{1}{2}x \Leftrightarrow (d_{1,2}): x\pm 2y=0.$$

Chuyển phương trình (H) về dạng tham số:

$$(H): \begin{cases} x=\frac{2}{\cos t} \\ y=\text{tgt} \end{cases},\ t\in[0,2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\}.$$

Khi đó điểm $M\in(H) \Rightarrow M(\frac{2}{\cos t}, \text{tgt})$

Khoảng cách từ M tới hai tiệm cận được cho bởi:

$$d_1=\frac{\left|\frac{2}{\cos t}+2\text{tgt}\right|}{\sqrt{1+4}}=\frac{2|1+\sin t|}{\sqrt{5}\cos t}\ \&\ d_2=\frac{\left|\frac{2}{\cos t}-2\text{tgt}\right|}{\sqrt{1+4}}=\frac{2|1-\sin t|}{\sqrt{5}\cos t},$$

suy ra:

$$S=d_1^2+d_2^2=\frac{4(1+\sin t)^2}{5\cos^2 t}+\frac{4(1-\sin t)^2}{5\cos^2 t}=\frac{8}{5}\left(\frac{1}{\cos^2 t}+\text{tg}^2t\right)$$

$$=\frac{8}{5}(1+2\text{tg}^2t)\geq\frac{8}{5}.$$

Vậy $S_{Max}=\frac{8}{5}$, đạt được khi:

$$\text{tg}^2t=0 \Rightarrow \cos t=\pm1 \Rightarrow M_1(2, 0)\ \&\ M_2(-2, 0).$$

Vậy tồn tại 2 điểm M_1, M_2 (chính là hai đỉnh trên trục thực của (H)).

Ví dụ 2: Cho điểm A(4, 1) và Hypebol (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1.$$

a. Tìm toạ độ điểm M thuộc Hypebol (H) sao cho đoạn AM ngắn nhất.

b. Chứng tỏ rằng nếu đoạn AM ngắn nhất, thì AM vuông góc với tiếp tuyến tại M của Hypebol.

Giải

a. Hypebol (H) có phương trình tham số:

$$(H): \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{\cos t} \\ y=2\text{tgt} \end{cases},\ t\in[0,2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\}.$$

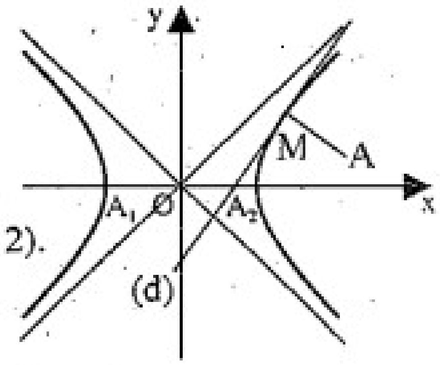
suy ra với điểm $M\in(H)$, ta được $M(\frac{\sqrt{2}}{\cos t}, 2\text{tgt})$, do đó:

$$AM^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{\cos t}-4\right)^2+(2\text{tgt}-1)^2=\frac{2}{\cos^2 t}-\frac{8\sqrt{2}}{\cos t}+16+4\text{tg}^2t-4\text{tgt}+1$$

$$=4\left(\frac{\sqrt{2}}{\cos t}-1\right)^2+2(\text{tgt}-1)^2+5\geq5$$

Vậy $AM_{Min}=5$, đạt được khi

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\cos t}-1=0 \\ \text{tgt}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{tgt}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \Rightarrow M(2, 2).$$



b. Ta có:

- Tiếp tuyến tại M của Hypebol (P) có dạng

$$(d): \frac{2x}{2}-\frac{2y}{4}=1 \Leftrightarrow (d): 2x-y-2=0.$$

- Đường thẳng AM có hệ số góc

$$k_{AM}=\frac{y_M-y_A}{x_M-xA}=-\frac{1}{2}.$$

Nhận xét rằng

$$k_d.\,k_{AM}=-2.\frac{1}{2}=-1 \Leftrightarrow (d)\perp AM.$$

Vậy AM ngắn nhất, thì AM vuông góc với tiếp tuyến tại M của Hypebol.

Ví dụ 3: Xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) và Hyperbol (H) , biết:

$$(d): x+y-3=0 \text{ và } (H): \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

Giải

Chuyển phương trình (H) về dạng tham số:

$$(H): \begin{cases} x=\frac{3}{\cos t} \\ y=4\text{tgt} \end{cases},\ t\in[0,2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\}. \qquad (1)$$

Thay (1) vào phương trình của (d), ta được:

$$4\sin t-3\cos t=-3 \Leftrightarrow 3\cos t=4\sin t+3 \xrightarrow{\sin^2 t+\cos^2 t=1} \left[\begin{array}{l} \sin t = 0 \\ \sin t = -\dfrac{24}{25} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow M_1(3, 0) \;\&\; M_2(-\frac{75}{7}, \frac{96}{7}).$$

Vậy $(d)\cap(H)=\{M_1, M_2\}$.

Ví dụ 4: Cho Hyperbol (H) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1 \text{ và } (d): x-y+1=0.$$

a. CMR $(H)\cap(d)=\varnothing$.

b. Giả sử $M\in(H)$ và MH là khoảng cách từ M đến (d). Tìm toạ độ điểm M sao cho độ dài MH nhỏ nhất.

Giải

a. Chuyển phương trình (H) về dạng tham số:

$$(H): \begin{cases} x = \dfrac{2\sqrt{2}}{\cos t} \\ y = 2\operatorname{tg} t \end{cases}, t\in[0, 2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}. \qquad (1)$$

Thay x và y từ phương trình của (H) vào phương trình của (d), ta được:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\cos t}-2\operatorname{tg} t+1=0 \Leftrightarrow 2\sin t-\cos t=2\sqrt{2} \text{ vô nghiệm.}$$

Do đó $(d)\cap(H)=\{\varnothing\}$.

b. Lấy $M\in(H)$, suy ra $M(\frac{2\sqrt{2}}{\cos t}, 2\operatorname{tg} t)$.

Ta được:

$$MH=d(M, (d))= \frac{\left|\frac{2\sqrt{2}}{\cos t}-2\operatorname{tg} t+1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{2\sqrt{2}}{\cos t}-2\operatorname{tg} t+1\right|$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\left|\frac{2\sqrt{2}}{\cos t}-2\operatorname{tg} t\right|-1\right|$$

$$\overset{\text{Bđt giả Bunhiacôpxki}}{\geq} \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\sqrt{(8-4)(\frac{1}{\cos^2 t}-\operatorname{tg}^2 t)}-1\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy $MH_{Min}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, đạt được khi:

$$2\sqrt{2}\operatorname{tg} t=2.\frac{1}{\cos t} \Leftrightarrow \sin t=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\&\; \operatorname{tg} t = 1 \\ \cos t = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\&\; \operatorname{tg} t = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(4,2) \\ M_1(-4,-2) \end{array}\right.$$

Thử lại:

- Với $M_1(4, 2)$, ta được $MH=\frac{1}{\sqrt{2}}|4-2+1|=\frac{3}{\sqrt{2}}$ không thoả mãn.
- Với $M_2(-4, -2)$, ta được $MH=\frac{1}{\sqrt{2}}|-4+2+1|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ thoả mãn.

Vậy, $d_{Min}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, đạt được tại điểm M(-4, -2).

Ví dụ 5: Cho Hyperbol (H) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1 \text{ và } (d): 2x+15y-10=0.$$

a. CMR $(d)\cap(H)=\{A, B\}$ với $x_A>0$. Tính độ dài AB.

b. Tìm toạ độ điểm C thuộc (H) sao cho ΔABC cân tại A.

Giải

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (H):

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{4}=1 \\ 2x+15y-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(5,0) \\ B(-\dfrac{25}{4}, \dfrac{3}{2}) \end{cases} \Rightarrow \text{độ dài } AB=\frac{3\sqrt{229}}{4}.$$

b. Chuyển phương trình Hyperbol (H) về dạng tham số:

$$(H): \begin{cases} x = \dfrac{5}{\cos t} \\ y = 2\operatorname{tg} t \end{cases}, t\in[0, 2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}.$$

Điểm $C\in(H) \Rightarrow C(\frac{5}{\cos t}, 2\operatorname{tg} t)$

- ΔABC cân tại A

$$\Leftrightarrow AB=AC \Leftrightarrow AB^2=AC^2 \Rightarrow C(-\frac{25}{4}, \frac{3}{2}).$$

Vậy với $C(-\frac{25}{4}, \frac{3}{2})$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 6: Cho Hypebol (H) và đường tròn (C) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1,$$

$$(C): (x+2)^2+y^2=4.$$

Lập phương trình tiếp tuyến chung của (H) và (C).

Giải

Họ tiếp tuyến (d_t) của (H) có dạng:

$$(d_t): \frac{x}{4\cos t}-\frac{y.\operatorname{tg} t}{2}=1 \Leftrightarrow (d_t): x-2y.\sin t-4\cos t=0. \qquad (1)$$

DIỄN ĐÀN TOÁN - LÝ - HÓA CẤP 2+3 ĐỊA CHỈ: 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

Đường tròn (C) có tâm I(-2, 0) và bán kính R=2.

Để (d_t) tiếp xúc với (P) điều kiện là:

$$d(I, (d_t))=R \Leftrightarrow \frac{|-2-4\cos t|}{\sqrt{1+4\sin^2 t}}=2 \Leftrightarrow 2\cos^2t+\cos t-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t=-1\\ \cos t=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t=-1\ \&\ \sin t=0\\ \cos t=\frac{1}{2}\ \&\ \sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos t=\frac{1}{2}\ \&\ \sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

- Với cost=-1 & sint=0, ta được tiếp tuyến
  (d): x+4=0.
- Với cost=$\frac{1}{2}$ ⇒ sint=$\frac{\sqrt{3}}{2}$, ta được hai tiếp tuyến:
  (d_1): x-y$\sqrt{3}$ -1=0,
- Với cost=$\frac{1}{2}$ ⇒ sint=$\frac{\sqrt{3}}{2}$, ta được hai tiếp tuyến:
  (d_2): x+y$\sqrt{3}$ -1=0.

Vậy (H) và (C) có 3 tiếp tuyến chung là (d), (d_1), (d_2).

Ví dụ 7: (Đề 113-Va): Cho Hypebol (H) có phương trình :

$$(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Một tiếp tuyến bất kỳ của (H) là (d) tiếp xúc với Hypebol tại điểm T. Gọi M, N là các giao điểm của tiếp tuyến (d) với các đường tiệm cận của (H).

a. CMR T là trung điểm của đoạn MN.

b. CMR diện tích ΔOMN không phụ thuộc tiếp tuyến (d).

Giải

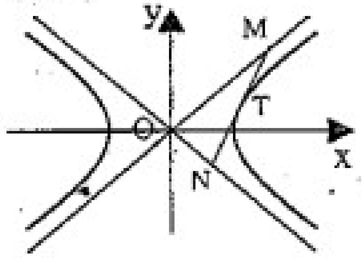
Phương trình hai đường tiệm cận của (H) là:

(d_1): y=$\frac{b}{a}$x ⇔ (d_1): bx-ay=0,

(d_2): y=-$\frac{b}{a}$x ⇔ (d_2): bx+ay=0,

Chuyển phương trình Hyperbol (H) về dạng tham số:

$$(H): \begin{cases}x=\frac{a}{\cos t}\\ y=b\,tgt\end{cases},\ t\in[0, 2\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}.$$



Điểm T∈(H) ⇒ T($\frac{a}{\cos t}$, btgt).

Phương trình tiếp tuyến của (H) tại T có dạng:

(d): bx-ay.sint=ab.cost.

Toạ độ giao điểm M=(d)∩(d_1) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}bx-ay=0\\ bx-ay.\sin t=ab\cos t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_M=\frac{a.\cos t}{1-\sin t}\\ y_M=\frac{b.\cos t}{1-\sin t}\end{cases} \Rightarrow M(\frac{a.\cos t}{1-\sin t}, \frac{b.\cos t}{1-\sin t}).$$

Toạ độ giao điểm N=(d)∩(d_2) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}bx+ay=0\\ bx-ay.\sin t=ab\cos t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_N=\frac{a.\cos t}{1+\sin t}\\ y_N=-\frac{b.\cos t}{1+\sin t}\end{cases} \Rightarrow N(\frac{a.\cos t}{1+\sin t}, -\frac{b.\cos t}{1+\sin t}).$$

a. Nhận xét rằng:

$$x_M+x_N=\frac{a.\cos t}{1-\sin t}+\frac{a.\cos t}{1+\sin t}=\frac{2a}{\cos t}=2x_T$$

⇔ T là trung điểm MN.

b. Gọi α là góc tạo bởi đường đường tiệm y=$\frac{b}{a}$x với trục Ox. Ta có:

$$S_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}OM.ON.\sin2\alpha \quad (1)$$

trong đó:

$$OM^2=(\frac{a.\cos t}{1-\sin t})^2+(\frac{b.\cos t}{1-\sin t})^2=\frac{(a^2+b^2)\cos^2 t}{(1-\sin t)^2} \quad (2)$$

$$ON^2=(\frac{a.\cos t}{1+\sin t})^2+(-\frac{b.\cos t}{1+\sin t})^2=\frac{(a^2+b^2)\cos^2 t}{(1+\sin t)^2} \quad (3)$$

$$tg\alpha=\frac{b}{a} \text{ và } \sin2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{2ab}{a^2+b^2}. \quad (4)$$

Thay (2), (3), (4) vào (1) ta được:

$$S_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}\,|\cos t|}{1-\sin t}\cdot\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}\,|\cos t|}{1+\sin t}\cdot\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$=ab$$

nghĩa là diện tích ΔOMN không phụ thuộc tiếp tuyến (d).

Ví dụ 8: Cho Hypebol (H) có phương trình :

$$(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

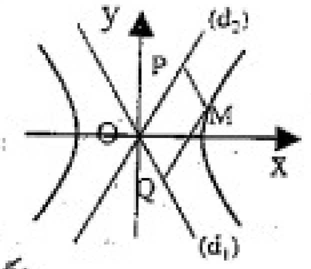
Điểm M bất kỳ thuộc (H).

a. CMR tích các khoảng cách từ M đến các tiệm cận của nó là một hằng số.

b. Từ M kẻ các đường thẳng song song với hai tiệm cận và cắt chúng tại P, Q. CMR diện tích hình bình hành OPMQ là một hằng số.

Giải

Phương trình hai đường tiệm cận của (H) là:



(d_1): $y=\frac{b}{a}x \Leftrightarrow (d_1)$: $bx-ay=0$,

(d_2): $y=-\frac{b}{a}x \Leftrightarrow (d_2)$: $bx+ay=0$,

Chuyển phương trình Hyperbol (H) về dạng tham số:

$$(H): \begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos t} \\ y=b\text{tg}t \end{cases},\ t\in[0, 2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}.$$

Điểm $M\in(H) \Rightarrow M(\frac{a}{\cos t}, b\text{tg}t)$.

a. Khoảng cách d_1, d_2 từ điểm M tới các tiệm cận (d_1) và (d_2) được xác định bởi:

$$d_1=\frac{\left|b.\frac{a}{\cos t}-ab.\text{tg}t\right|}{\sqrt{b^2+a^2}}\ \&\ d_2=\frac{\left|b.\frac{a}{\cos t}+ab.\text{tg}t\right|}{\sqrt{b^2+a^2}}.$$

Do đó:

$$d_1.d_2=\frac{\left|b.\frac{a}{\cos t}-ab.\text{tg}t\right|}{\sqrt{b^2+a^2}}.\frac{\left|b.\frac{a}{\cos t}+ab.\text{tg}t\right|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{\left|a^2b^2\left(\frac{1}{\cos^2 t}-\text{tg}^2t\right)\right|}{b^2+a^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

Vậy, tích các khoảng cách từ điểm M bất kỳ của Hypebol (H) đến các tiệm cận của nó là một hằng số.

b. Gọi α là góc tạo bởi đường đường tiệm $y=\frac{b}{a}x$ với trục Ox. Ta có:

$$\text{tg}\alpha=\frac{b}{a}\ \text{và}\ \sin2\alpha=\frac{2\text{tg}\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

$$S_{OPMQ}=OP.OQ.\sin2\alpha=\frac{2ab}{a^2+b^2}.OP.OQ \Rightarrow OP.OQ=\frac{a^2+b^2}{2ab}.S_{OPMQ}$$

Mặt khác:

$$S_{OPMQ}=OQ.h_1=OP.h_2$$

$$\Rightarrow S^2_{OPMQ}=OP.OQ.h_1h_2=\frac{a^2+b^2}{2ab}.S_{OPMQ}.\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow S_{OPMQ}=\frac{ab}{2}\ \text{không đổi.}$$

Ví dụ 9: Cho Hypebol (H) và đường tròn (C) có phương trình:

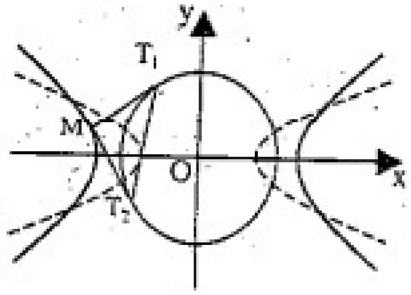
$$(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ \text{và (C)}: x^2+y^2=R^2\ \text{với}\ 0<R\le a$$

Từ M∈(H) kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (C), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm. CMR đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Hypebol cố định.

Giải

Viết phương trình đường thẳng T_1T_2.

Chuyển phương trình (H) về dạng tham số



$$(H): \begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos t}=x(t) \\ y=b\text{tg}t=y(t) \end{cases},\ t\in[0, 2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}.$$

Điểm $M\in(H) \Rightarrow M(\frac{a}{\cos t}, b\text{tg}t)$

Gọi toạ độ của tiếp điểm $T(x_1, y_1)$, ta có:

- Tiếp tuyến với đường tròn (C) có dạng:
  $xx_1+yy_1=R^2$.
- Tiếp tuyến trên đi qua điểm $M(\frac{a}{\cos t}, b\text{tg}t)$, ta có

$$\frac{ax_1}{\cos t}+by_1\text{tg}t=R^2. \qquad (1)$$

Nhận thấy toạ độ T_1, T_2 đều thoả mãn (1), vậy phương trình đường thẳng (T_1T_2) có dạng:

$$(T_1T_2): \frac{ax}{\cos t}+by\text{tg}t=R^2 \Leftrightarrow (T_1T_2): ax+by\sin t=R^2.\cos t$$

a. Gọi N(x, y) là điểm mà (T_1T_2) không đi qua với mọi t, khi đó
$ax+by\sin t=R^2.\cos t$, vô nghiệm t
$\Leftrightarrow R^2\cos t-by\sin t=ax$, vô nghiệm t

$$\Leftrightarrow R^4+b^2y_i^2<a^2x^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{R^4/a^2}-\frac{y^2}{R^4/b^2}<1.$$

b. Ta đi chứng minh (T_1T_2) tiếp xúc với Hypebol cố định (H_1): $\frac{x^2}{R^4/a^2}-\frac{y^2}{R^4/b^2}=1$.

Thật vậy :

$$\frac{R^4}{a^2}a^2-\frac{R^4}{b^2}.b^2\sin^2t=R^4\cos^2t\ \text{luôn đúng}$$

Vậy (T_1T_2) luôn tiếp xúc với Hypebol (H_1): $\frac{x^2}{R^4/a^2}-\frac{y^2}{R^4/b^2}=1$.

III.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho Hypebol (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1.$$

a. Tìm các điểm M thuộc Hypebol (H) có toạ độ nguyên

b. Có bán kính qua tiêu điểm này bằng 2 lần bán kính qua tiêu điểm kia.

c. Tìm các điểm N thuộc Hypebol (H) có tổng bình phương các khoảng cách tới hai tiệm cận đạt giá trị nhỏ nhất.

d. Cho A(0, 4), tìm toạ độ điểm B thuộc Hypebol (H) sao cho đoạn AB ngắn nhất. Chứng tỏ rằng nếu đoạn AB ngắn nhất, thì AB vuông góc với tiếp tuyến tại B của Hypebol.

Bài tập 2: Cho Hypebol (H) có phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Tìm điểm M trên (H) sao cho độ dài F_1M ngắn nhất, dài nhất.

Bài tập 3: Tìm điểm M trên (H) sao cho M nhìn hai tiêu điểm F_1, F_2 dưới một góc vuông, biết (H) có phương trình cho bởi:

a. $(H): \frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1.$

b. $(H): \begin{cases} x=\frac{1}{\cos t} \\ y=\sqrt{3}\operatorname{tg}t \end{cases}, t\in[0, 2\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}.$

Bài tập 4: Xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) và Hyperbol (H) trong các trường hợp:

a. (d): 2x+y=0 và $(H): \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1.$

b. (d): kx-y+1=0 và $(H): \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1.$

Bài tập 5: Cho Hyperbol (H) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1 \text{ và (d): } x-y+m=0.$$

a. CMR (H)∩(d)={A, B} với A, B thuộc hai nhánh khác nhau của (H), giả sử $x_A<x_B$.

b. Tìm m sao cho $2F_1A=F_2B$.

Bài tập 6: Cho Hyperbol (H) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{4}-y^2=1 \text{ và (d): } x-y-1=0.$$

a. CMR (H)∩(d)=∅.

b. Giả sử M∈(H) và MH là khoảng cách từ M đến (d). Tìm toạ độ điểm M sao cho độ dài MH nhỏ nhất.

Bài tập 7: Cho hai điểm A(3, 2), B(0, -1) và Hyperbol (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

a. Lập phương trình đường thẳng qua A, B. CMR (H)∩(AB)=∅.

b. Tìm toạ độ điểm C∈(H) sao cho ΔABC có diện tích nhỏ nhất.

Bài tập 8: Cho Hyperbol (H) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1 \text{ \& (d): } x+6y=0.$$

a. CMR (d) luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.

b. Tìm toạ độ điểm C thuộc (H) sao cho ΔABC có diện tích bằng 30.

Bài tập 9: Cho Hyperbol (H) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1 \text{ và (d): } x\sqrt{2}-y-2=0.$$

a. CMR (d) luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.

b. Tìm toạ độ điểm C thuộc (H) sao cho :
  - ΔABC có diện tích bằng 5.
  - ΔABC cân.
  - ΔABC vuông.

Bài tập 10: Cho đường thẳng (Δ) và Hypebol (H) có phương trình:

$$(\Delta): x-y-1972=0 \text{ \& } (H): \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1.$$

Lập phương trình tiếp tuyến của Hypebol (H) song song (Δ).

Bài tập 11: Cho Hyperbol (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Viết phương trình các tiếp tuyến của (H), biết tiếp tuyến:

a. Song song với đường thẳng (Δ_1): x-y+6=0, lập phương trình đường thẳng đi qua tiếp điểm.

b. Vuông góc (Δ_2): x-y+2003=0.

Bài tập 12: Cho Hyperbol (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Viết phương trình các tiếp tuyến của (H), biết tiếp tuyến:

a. Đi qua điểm A(4, $3\sqrt{3}$).

b. Đi qua điểm B(1, 0).

c. Song song với đường thẳng (Δ_1): $x\sqrt{3}-y+6=0$,

d. Vuông góc (Δ_2): x-2y+3=0.

Bài tập 13: Cho Hypebol (H) và Parabol (P) có phương trình :

$$(H): \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1 \text{ \& (P): } y^2=2x.$$

Lập phương trình tiếp tuyến chung của (H) và (P).

Bài tập 14: Cho Hypebol (H) có phương trình:

$$(H):\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

Một tiếp tuyến bất kỳ của (H) là (d) tiếp xúc với Hypebol tại điểm T. Gọi M, N là các giao điểm của tiếp tuyến (d) với các đường tiệm cận của (H).

a. CMR T là trung điểm của đoạn MN.

b. CMR diện tích ΔOMN không phụ thuộc tiếp tuyến (d).

Bài tập 15: Cho Hypebol (H) có phương trình:

$$(H):\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

Điểm M bất kỳ thuộc (H).

a. CMR tích các khoảng cách từ M đến các tiệm cận của nó là một hằng số.

b. Từ M kẻ các đường thẳng song song với hai tiệm cận và cắt chúng tại P, Q. CMR diện tích hình bình hành OPMQ là một hằng số.

Bài tập 16: Cho Hyperbol (H) và đường tròn (C) có phương trình:

$$(H):\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1\ \ \&\ (C):\ x^2+y^2=4.$$

a. Từ $M\in(H)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (C), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm. CMR đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Hypebol cố định.

b. Từ $N\in(C)$ kẻ hai tiếp tuyến ME_1, ME_2 tới (H), trong đó E_1, E_2 là các tiếp điểm. CMR đường thẳng E_1E_2 luôn tiếp xúc với một Elíp cố định.

Bài tập 17: Cho Hyperbol (H) và Elíp (E) có phương trình:

$$(H):\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=-1\ \ \&\ (E):\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

a. Từ $M\in(H)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (E), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm. CMR đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Hypebol cố định.

b. Từ $N\in(E)$ kẻ hai tiếp tuyến ME_1, ME_2 tới (H), trong đó E_1, E_2 là các tiếp điểm. CMR đường thẳng E_1E_2 luôn tiếp xúc với một Elíp cố định.

Bài tập 18: Cho Hyperbol (H) và Elíp (E) có phương trình:

$$(H):\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\ \ \&\ (E):\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Từ $M\in(H)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (E), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm Giả sử MT_1, MT_2 cắt (E_1) tại hai điểm E_1, E_2 khác M.

a. CMR đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một Hypebol cố định.

b. CMR đường thẳng E_1E_2 luôn tiếp xúc với một Hypebol cố định.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. G.KORN-T.KORN. Sổ tay Toán học (Phan Văn Hạp và Nguyễn Trọng Bá dịch). Nhà xuất bản đại học và trung học chuyên nghiệp giáo dục - 1977.
2. Trần Thành Minh (Chủ biên). Giải toán Lượng giác . Nhà xuất bản giáo dục - 2001.
3. Trần Văn Hạo (Chủ biên). Lượng giác . Nhà xuất bản giáo dục - 2001.
4. Nguyễn Đức Đồng (Chủ biên). Tuyển tập 599 bài toán lượng giác chọn lọc . Nhà xuất bản Hải Phòng - 2000.
5. Phan Huy Khải. Tuyển tập các bài toán lượng giác - Tập 1 . Nhà xuất bản giáo dục - 96.
6. Lê Hồng Đức. Phương pháp giải Toán Mũ & Lôgarit. Nhà xuất bản Hà Nội - 2003
7. Lê Hồng Đức. Phương pháp giải Toán Tích phân. Nhà xuất bản Hà Nội - 2003
8. Tạp chí Toán học tuổi trẻ - Nhà xuất bản Gáo dục.

LỜI CUỐI

Tác giả luôn sẵn lòng giải đáp mọi thắc mắc của các em học sinh và độc giả về nội dung của cuốn tài liệu này.

Mọi chi tiết xin liên hệ trực tiếp tới:

Ths. Lê Hồng Đức
Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Tây Hồ - Hà Nội.
Điện thoại: 04 7196671.